Néhány kombinatorikus geometria probléma

Szabó László
Magyar Tudományos Akadémia,
Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet,
1111 Budapest,
Lágymányosi u. 11.

2001. október 24.

1. Bevezetés

Ebben a cikkben a kombinatorikus geometria néhány ártatlanul hangzó, mégis évtizedek óta megoldatlan problémáját és az azokkal kapcsolatos legújabb eredményeket szeretnénk bemutatni. Az egyszerűség kedvéért csak síkbeli problémákra szorítkozunk. A következő két kérdést Erdős Pál vetette fel még 1946-ban.

(1) Egy n elemű pontrendszer pontjai között egy adott távolság legfeljebb hány alkalommal léphet fel?

(2) Egy n elemű pontrendszer pontjai között legalább hány különböző távolság lép fel?

Mély számelméleti eredmények felhasználásával Erdős megmutatta, hogy léteznek olyan n elemű pontrendszerek, amelyekben ugyanaz a távolság legalább $n^{1+c_1/\log\log n}$ alkalommal fordul elő, illetve olyanok, amelyekben a különböző távolságok száma legfeljebb $c_2 n/\sqrt{\log n}$ alkalmas c_1 és c_2 pozitív konstansokkal. Erdős azt is bebizonyította, hogy bármely n elemű pontrendszer pontjai között egy adott távolság legfeljebb $n^{3/2}$ alkalommal léphet fel, illetve a pontok között előforduló különböző távolságok száma legalább $(n-\frac{3}{4})^{1/2}-\frac{1}{2}$. Ezeket az eredményeket egyre bonyolultabb és bonyolultabb módszerek alkalmazásával többször megjavították, például Joel Spencer, Szemerédi Endre és Tom Trotter, illetve Fan Chung, Szemerédi Endre és Tom Trotter bizonyították, hogy bármely n elemű pontrendszer pontjai között egy adott távolság legfeljebb $c_3 n^{4/3}$ alkalommal léphet fel, illetve a pontok között előforduló különböző távolságok száma legalább $n^{4/5}/(\log n)^{c_4}$ alkalmas c_3 és c_4 pozitív konstansokkal.

Aztán 1995-ben váratlan fordulat történt. Székely László észrevette, hogy Ajtai Miklós, Vašek Chvátal, M. Newborn és Szemerédi Endre egy 1982-ből származó, topológiai gráfok keresztezési számára vonatkozó egyszerű eredménye számos eddig nehéznek tűnő kombinatorikus geometria problémánál, beleértve a fenti két Erdős problémát is, boszorkányos hatékonysággal alkalmazható. Hogy miképpen? Többek között erről szól a cikk.

2. Topológiai gráfok

Tekintsünk egy véges pontrendszert a síkon és a pontrendszer bizonyos pontjait kössük össze olyan önmagukat nem metsző görbékkel, amelyek közül bármely kettőnek legfeljebb véges sok közös pontja van és amelyek a végpontjaiktól eltekintve nem mennek át a pontrendszer egyetlen pontján sem. Két pontot több görbe is összeköthet, sőt olyan görbéket is megengedünk, amelyeknek a két végpontja a pontrendszer ugyanazon pontja (persze azt feltesszük, hogy a görbék száma véges). Az így kialakult gráfot topológiai gráfnak nevezzük. Egy G topológiai gráf $\kappa(G)$ keresztezési számát definiáljuk a következőképpen. A gráf összes lehetséges élpárjára határozzuk meg a két él metszéspontjainak számát (közös végpont nem számít metszéspontnak!), majd adjuk össze ezeket a számokat.

Legyen G egyszerű topológiai gráf, vagyis amelyben nincs olyan él, amelynek mindkét végpontja ugyanaz a csúcs, továbbá bármely két csúcs között legfeljebb egy él halad. Jelölje G csúcsainak számát n, éleinek számát pedig m. Euler tételéből egyszerűen következik, hogy ha G síkgráf, vagyis ha semelyik két éle nem metszi egymást, akkor $m \leq 3n - 6$. Mit mondhatunk azonban, ha $m > 3n - 6$?

2.1. Állítás. *Legyen G egyszerű topológiai gráf, amelyben a csúcsok száma n, az élek száma pedig m. Ekkor*

$$\kappa(G) \geq m - 3n + 6.$$

Bizonyítás. Ha $m = 3n - 5$, akkor Euler tételével összhangban a G gráfnak létezik két olyan éle, amelyek metszik egymást, vagyis $\kappa(G) \geq 1$. Most legyen $m > 3n - 5$ és tegyük fel, hogy bármely n csúcsú és $m - 1$ élű topológiai gráf keresztezési száma legalább $(m - 1) - 3n + 6$. Mivel $m > 3n - 6$, ezért

G tartalmaz két olyan élt, amelyek metszik egymást. Elhagyva e két metsző él egyikét, a kapott G' gráfra az indukciós feltevés szerint $\kappa(G') \geq (m-1)-3n+6$, ahonnan triviális módon $\kappa(G) \geq m-3n+6$. □

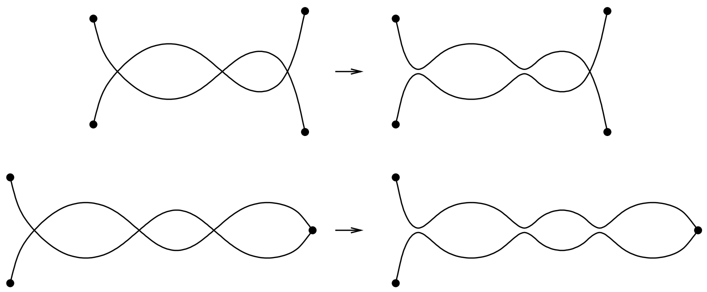
Ez a becslés elég jó, ha m és n körülbelül ugyanakkora. Mi történik viszont, ha m sokkal nagyobb mint n?

2.2. Tétel. *Legyen G egyszerű topológiai gráf, amelyben a csúcsok száma n, az élek száma pedig m. Most ha $m \geq 4n$, akkor*

$$\kappa(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

Ez Ajtai Miklós, Vašek Chvátal, M. Newborn és Szemerédi Endre már említett, még 1982-ből származó tétele. Bár a tétel teljes indukcióval is viszonylag egyszerűen bizonyítható, itt azonban egy sokkal elegánsabb valószínűségszámítási bizonyítást közlünk.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy elég az állítást olyan G topológiai gráfokra igazolni, ahol bármely két él legfeljebb egy pontban metszi egymást, továbbá közös végpontú élek nem metszik egymást. Valóban, ha G nem ilyen, akkor létezik olyan G' topológiai gráf, amelynek csúcshalmaza megegyezik G csúcshalmazával, két csúcsa akkor és csak akkor van összekötve, ha a két csúcs G-ben is össze van kötve, és amelyre $\kappa(G') < \kappa(G)$ teljesül (ld. 1. ábra).



1. ábra. Elég speciális topológiai gráfokat tekinteni.

Legyen $p = \frac{4n}{m}$. Ekkor $p \leq 1$ a feltételünk szerint. Töröljük a G gráf minden egyes csúcsát egymástól függetlenül, $1-p$ valószínűséggel és legyen

G_p a G gráfnak a megmaradt csúcsok által kifeszített részgráfja. Jelölje n_p és m_p a G_p gráf csúcsainak illetve éleinek számát. Ekkor a 2.1. Állítás szerint $\kappa(G_p) - m_p + 3n_p \geq 0$, így ugyanez a bal oldal várható értékére is fennáll, vagyis

$$E[\kappa(G_p) - m_p + 3n_p] \geq 0.$$

Nyilván $E[n_p] = pn$, továbbá $E[m_p] = p^2m$, hiszen a G gráf egy éle csak akkor lesz éle a G_p gráfnak is, ha végpontjainak egyikét sem töröltük G-ből. Hasonlóan $E[\kappa(G_p)] = p^4\kappa(G)$, hiszen a G gráf egy metsző élpárja csak akkor lesz jelen a G_p gráfban is, ha az élek végpontjainak egyikét sem töröltük G-ből (ne felejtsük el, hogy itt négy különböző végpontról van szó). Ennélfogva a várható érték linearitását felhasználva

$$0 \leq E[\kappa(G_p)] - E[m_p] + 3E[n_p] = p^4\kappa(G) - p^2m + 3pn,$$

ahonnan

$$\kappa(G) \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} = \frac{1}{64}\left[\frac{4m}{(n/m)^2} - \frac{3n}{(n/m)^3}\right] = \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}$$

amit bizonyítani akartunk. □

A fenti eredmény alkalmazására mindenekelőtt lássunk egy kiemelkedően szép példát. A következő tételt először Szemerédi Endre és Tom Trotter bizonyította be 1983-ban. Megjegyezzük, hogy a tétel a konstans szorzótól eltekintve éles.

2.3. Tétel. *A sík n pontja és m egyenese között az illeszkedő pont-egyenes párok száma legfeljebb* $4(n^{2/3}m^{2/3} + n + m)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P}$ egy n elemű ponthalmaz, $\mathcal{L}$ egy m elemű egyeneshalmaz és jelölje a $\mathcal{P}$ halmaz pontjai és az $\mathcal{L}$ halmaz egyenesei közötti illeszkedések számát I. Nyilván elég az állítást olyan $\mathcal{P}$ és $\mathcal{L}$ halmazokra igazolni, ahol $\mathcal{L}$ minden egyenese átmegy $\mathcal{P}$ legalább egy pontján. Definiáljunk egy G topológiai gráfot a következőképpen. A gráf csúcsainak halmaza legyen $\mathcal{P}$, éleinek halmaza pedig álljon azon szakaszokból, amelyekre a $\mathcal{P}$ pontrendszer az $\mathcal{L}$ halmaz egyeneseit bontja (a félegyenesek természetesen nem élei a G gráfnak). Így ha $\mathcal{L}$ valamelyik egyenesére a $\mathcal{P}$ pontrendszernek mondjuk k pontja illeszkedik, akkor az az egyenes $k-1$ éllel járul hozzá a G gráfhoz. Ennélfogva ha t jelöli a G gráf éleinek számát, akkor $I = t + m$.

Most két eset van. Ha $t < 4n$, akkor $I < 4n + m$. Ha viszont $t \geq 4n$, akkor a 2.2. Tétel szerint

$$\kappa(G) \geq \frac{1}{64}\frac{(I-m)^3}{n^2}.$$

Mivel a G gráf minden éle rajta van $\mathcal{L}$ valamelyik egyenesén, ezért $\kappa(G) \leq m(m-1)/2 < m^2/2$, ahonnan $I < 4n^{2/3}m^{2/3} + m$. Így mindkét esetben $I < 4(n^{2/3}m^{2/3} + n + m)$. $\square$

3. Pontok közötti azonos távolságok

Ebben a részben a bevezetésben már említett Erdős problémák közül az azonos távolságok számára vonatkozóval fogunk foglalkozni.

3.1. Tétel. *Egy n elemű pontrendszer pontjai között egy adott távolság legfeljebb $5n^{4/3}$ alkalommal léphet fel.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy egy n elemű pontrendszer pontjai között az egységtávolság legfeljebb $10n^{4/3}$ alkalommal léphet fel. Legyen $\mathcal{P}$ egy n elemű pontrendszer és jelölje U a pontok között fellépő egységtávolságok számát. Jelölje a pontok köré rajzolt, egységsugarú körök halmazát $\mathcal{K}$. Definiáljunk egy G topológiai gráfot a következőképpen. A gráf csúcsainak halmaza legyen $\mathcal{P}$, éleinek halmaza pedig álljon azon körívekből, amelyekre a $\mathcal{P}$ pontrendszer a $\mathcal{K}$ halmaz köreit bontja (azon körök, amelyekre $\mathcal{P}$ egyetlen pontja sem illeszkedik természetesen nem élei a G gráfnak). Így ha $\mathcal{K}$ valamelyik körére a $\mathcal{P}$ pontrendszernek mondjuk k pontja illeszkedik, akkor az a kör k éllel járul hozzá a G gráfhoz. Ennélfogva ha t jelöli a G gráf éleinek számát, akkor $t = 2U$. Ha a $\mathcal{K}$ körhalmaz valamelyik körén csak egy vagy két pont van, akkor töröljük a G gráf élei közül az erről a körről származó köríveket. Az így kapott gráf éleinek száma nyilván legalább $t - 2n$, nem tartalmaz hurokélt és bármely két csúcsa között legfeljebb két él halad. Ha most valamely két csúcs között két él halad, akkor töröljük ezek közül az egyiket. Az így kapott G' egyszerű gráf éleinek számát jelölje t'. Nyilván $t' \geq (t-2n)/2 = U - n$.

Most két eset van. Ha $t' < 4n$, akkor $U < 5n$. Ha viszont $t' \geq 4n$, akkor a 2.2. Tétel szerint

$$\kappa(G') \geq \frac{1}{64}\frac{(U-n)^3}{n^2}.$$

Mivel G' minden éle rajta van $\mathcal{K}$ valamelyik körén, ezért $\kappa(G') \leq 2n(n-1)/2 < n^2$, ahonnan $U < 4n^{4/3} + n$. Így mindkét esetben $U < 5n^{4/3}$. $\square$

Mint már említettük, csak olyan pontrendszereket ismerünk, amelyben egy adott távolság ennél lényegesen kevesebb alkalommal fordul elő. Meglepő módon sokkal jobb a helyzet ha azonos távolságok helyett közel azonos távolságokkal is megelégszünk. Erdős Pál, Makai Endre, Pach János és Joel Spencer 1991-ben bizonyították a következőt. Legyen t tetszőleges pozitív valós szám és tekintsünk egy olyan n elemű pontrendszert, ahol bármely két pont távolsága legalább 1. Ekkor a pontok között fellépő, t és $t+1$ közé eső távolságok száma legfeljebb $\lfloor n^2/4 \rfloor$ feltéve, hogy a pontrendszer elemszáma elég nagy. Ráadásul ez a korlát t és n végtelen sok értékére éles.

A teljesség kedvéért még két eredményt említünk. Egy n elemű pontrendszerben a maximális távolság legfeljebb n alkalommal, míg a minimális távolság legfeljebb $\lfloor 3n - \sqrt{12n-3} \rfloor$ alkalommal fordulhat elő. A maximális távolságra vonatkozó korlátot J. Sutherland igazolta 1935-ben, míg a minimális távolságra vonatkozót Heiko Harborth 1974-ben. Megjegyezzük, hogy mindkét korlát minden $n \geq 3$ egész számra éles.

4. Pontok közötti különböző távolságok

Rátérünk a különböző távolságok minimális számára vonatkozó problémára. Ehhez szükségünk lesz a 2.2. Tétel egy egyszerű átfogalmazására, illetve annak egy többszörös éleket is tartalmazó gráfokra vonatkozó általánosítására.

4.1. Tétel. *Legyen G egyszerű topológiai gráf, amelyben a csúcsok száma n, az élek száma pedig m. Ekkor*

$$\kappa(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2} - n.$$

4.2. Tétel. *Legyen $k \geq 2$ egész szám és legyen G olyan topológiai gráf, amelyben a csúcsok száma n, az élek száma m és bármely két csúcs között legfeljebb k él van (hurokéleket továbbra sem engedünk meg). Ekkor*

$$\kappa(G) \geq \frac{1}{1728}\frac{m^3}{kn^2} - nk^2.$$

Bizonyítás. Nyilván itt is elég az állítást olyan G topológiai gráfokra igazolni, ahol bármely két él legfeljebb egy pontban metszi egymást, továbbá közös végpontú élek nem metszik egymást.

Töröljük először a G gráf minden egyes élét egymástól függetlenül, $1 - 1/k$ valószínűséggel majd töröljök az összes megmaradt többszörös élt. Jelölje m_k az így kapott G_k gráf éleinek számát. Ekkor a 4.1. Tétel szerint

$$\kappa(G_k) \geq \frac{1}{64}\frac{m_k^3}{n^2} - n.$$

Ugyanez nyilván a várható értékekre is fennáll, vagyis

$$E[\kappa(G_k)] \geq \frac{1}{64}\frac{E[m_k^3]}{n^2} - n.$$

Annak a valószínűsége, hogy a G gráf valamely rögzített e éle jelen lesz a G_k gráfban is nyilván legfeljebb $1/k$. Másrészt, ha e két olyan G-beli csúcsot köt össze, amelyek között $2 \leq l \leq k$ él van, akkor annak a valószínűsége, hogy az első lépésben az e élt nem töröltük, de az azzal párhuzamos $l-1$ él mindegyikét töröltük

$$\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{l-1} \geq \frac{1}{3k},$$

hiszen $(1-1/k)^{l-1} \geq (1-1/k)^{k-1} > 1/3$. Ennélfogva $E[m_k] \geq m/(3k)$ és így a konvex függvényekre vonatkozó Jensen egyenlőtlenség felhasználásával $E[m_k^3] \geq E[m_k]^3 \geq m^3/(27k^3)$. Továbbá nyilvánvaló módon $E[\kappa(G_k)] \leq \kappa(G)/k^2$, hiszen a G gráf egy metsző élpárja csak akkor lesz jelen a G_k gráfban is, ha az élek egyikét sem töröltük G-ből. Mindezeket összevetve

$$\frac{\kappa(G)}{k^2} \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{27k^3n^2} - n$$

ahonnan

$$\kappa(G) \geq \frac{1}{1728}\frac{m^3}{kn^2} - nk^2$$

amit bizonyítani akartunk. □

4.3. Tétel. *Egy n elemű pontrendszer pontjai között fellépő különböző távolságok száma legalább $cn^{4/5}$, ahol c alkalmas pozitív konstans.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{P}$ egy n elemű pontrendszer és jelölje M a pontrendszer pontjai között fellépő különböző távolságok számát. Feltehetjük, hogy egy rögzített, nagyon kicsi c_5 pozitív konstanssal $M < c_5 n/\log n$ teljesül, különben készen vagyunk. Jelölje $\mathcal{K}$ a pontrendszer pontjai köré rajzolt azon körök halmazát, amelyek $\mathcal{P}$ legalább egy pontját tartalmazzák. Definiáljunk egy G topológiai gráfot a következőképpen. A gráf csúcsainak halmaza legyen $\mathcal{P}$, éleinek halmaza pedig álljon azon körívekből, amelyekre a $\mathcal{P}$ pontrendszer a $\mathcal{K}$ halmaz köreit bontja. A G gráf éleinek száma nyilván $n(n-1)$.

Ha a $\mathcal{K}$ körhalmaz valamelyik körén csak egy pont van, akkor töröljük a G gráf élei közül az erről a körről származó körívet. Ha valamelyik körön két pont van, akkor töröljük az erről a körről származó két ív közül az egyiket. Jelölje G' az így kapott gráfot. A G' gráf éleinek száma legalább $n(n-1) - Mn > n^2/3$, ha a c_1 konstans elég kicsi.

Megmutatjuk, hogy ha a G' gráf élei közül töröljük azokat, amelyek multiplicitása legalább $c_6\sqrt{M}$, ahol c_6 egy rögzített, elég nagy pozitív konstans, akkor az így kapott G'' gráfban az élek száma még mindig legalább $n^2/6$.

Jelölje L_i azon egyenesek halmazát, amelyekre a $\mathcal{P}$ pontrendszer legalább i de legfeljebb $2i-1$ pontja illeszkedik, ahol $1 < i < M$ tetszőleges egész szám. Tekintsük az L_i halmaz egy tetszőleges e egyenesét. Mivel a $\mathcal{P}$ pontrendszernek az e egyenesre illeszkedő bármely pontja $\mathcal{K}$ körei közül legfeljebb M körnek a középpontja, továbbá minden ilyen kör G' legfeljebb két e-re szimmetrikus élét tartalmazza, így az e egyenes a G' gráf legfeljebb $4Mi$ élének lehet szimmetriatengelye. Most felhasználva, hogy ha a G' gráf valamely két pontja között legalább i de legfeljebb $2i-1$ él van, akkor ennek az élhalmaznak L_i valamelyik egyenese szükségképpen szimmetriatengelye, kapjuk, hogy a legalább i de legfeljebb $2i-1$ multiplicitású élek száma nem nagyobb mint az L_i halmaz elemszámának $4Mi$-szerese. De mekkora az L_i halmaz elemszáma?

4.4. Állítás. *Bármely $i \geq 2$ egész számra egy n elemű pontrendszer pontjai közül a legalább i pontot tartalmazó egyenesek száma legfeljebb* $256(n^2/i^3 + n/i)$.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{Q}$ egy n elemű pontrendszer és jelölje $\mathcal{L}$ azon egyenesek halmazát, amelyek $\mathcal{Q}$ legalább i pontjára illeszkednek. Jelölje l az $\mathcal{L}$ halmaz egyeneseinek számát. Definiáljunk egy H topológiai gráfot a következőképpen. A gráf csúcsainak halmaza legyen $\mathcal{Q}$, éleinek halmaza pedig álljon azon szakaszokból, amelyekre a $\mathcal{Q}$ pontrendszer az $\mathcal{L}$ halmaz egyeneseit bontja (a félegyenesek természetesen nem élei a H gráfnak). Mivel $\mathcal{L}$ bármely egyenesére a $\mathcal{Q}$ pontrendszernek legalább i pontja illeszkedik, ezért ha t jelöli a H gráf éleinek számát, akkor $t \geq l(i-1)$.

Két eset van. Ha $t < 4n$, akkor $l < 8n/i$. Ha viszont $t \geq 4n$, akkor a 2.2. Tétel szerint

$$\kappa(H) \geq \frac{1}{64} \frac{l^3(i-1)^3}{n^2}.$$

Mivel a H gráf minden éle rajta van $\mathcal{L}$ valamelyik egyenesén, ezért $\kappa(H) \leq l(l-1)/2 < l^2/2$, ahonnan $l < 256n^2/i^3$. Ennélfogva mindkét esetben $l < 256(n^2/i^3 + n/i)$. □

A fenti állításból következik, hogy a legalább i de legfeljebb $2i-1$ multiplicitású élek száma legfeljebb $1024(Mn^2/i^2 + Mn)$. Innen egyszerű számolással kapjuk, hogy a legalább i multiplicitású élek száma legfeljebb

$$\sum_{j=i}^{\lceil \log n \rceil - 1} 1024 \left(\frac{Mn^2}{(i2^{j-i})^2} + Mn \right) < 2048 \left(\frac{Mn^2}{i^2} + Mn \log n \right).$$

Speciálisan, a G' gráf legalább $c_6\sqrt{M}$ multiplicitású éleinek száma legfeljebb $2048(n^2/c_6^2 + c_5 n^2) < n^2/6$ ha a c_5 konstans elég kicsi, a c_6 konstans pedig elég nagy (ne felejtsük el, hogy $M < c_5 n/\log n$).

Ezek után tekintsük a G'' gráfot. Ebben a gráfban az élek száma legalább $n^2/6$ és bármely két csúcs között legfeljebb $c_6\sqrt{M}$ él van, ennélfogva a 4.2. Tétel szerint

$$\kappa(G'') \geq \frac{1}{1728} \frac{n^6/216}{c_6\sqrt{M}n^2} - c_6^2 Mn.$$

Mivel a G'' gráf minden éle rajta van $\mathcal{K}$ valamelyik körén és $\mathcal{K}$ köreinek száma legfeljebb Mn, így $\kappa(G'') \leq (Mn)^2$, hiszen két körnek legfeljebb két közös pontja lehet. Ezt felhasználva $M \geq cn^{4/5}$ egy alkalmas c pozitív konstanssal azonnal adódik. □

Vegyük észre, hogy a bizonyításból egy sokkal erősebb eredmény is kiolvasható.

4.5. Tétel. *Egy n elemű pontrendszer pontjai között mindig létezik olyan, amelyből mért különböző távolságok száma legalább $cn^{4/5}$, ahol c alkalmas pozitív konstans.*

Megjegyezzük, hogy itt az előző rekord $c_7 n^{3/4}$ volt; ezt Ken Clarkson, Herbert Edelsbrunner, Leo Guibas, Micha Sharir és Emo Welzl bizonyították 1990-ben.

5. Pontrendszerek felező egyenesei

Várható volt, hogy Székely László észrevétele a bevezetésben említett két Erdős problémán kívül más régóta megoldatlan kombinatorikus geometria problémánál is alkalmazható lesz. Így is történt, 1997-ben Tamal Dey egy algoritmuselméleti szempontból is alapvető fontosságú problémánál ért el jelentős előrelépést.

Tekintsünk egy $2n$ elemű $\mathcal{P}$ pontrendszert, ahol semelyik három pont nincs egy egyenesen. Egy olyan egyenest, amely $\mathcal{P}$ két pontjára illeszkedik és amely által határolt nyílt félsíkok mindegyike $\mathcal{P}$ pontosan $n-1$ pontját tartalmazza a $\mathcal{P}$ pontrendszer egy felező egyenesének fogunk nevezni. A $\mathcal{P}$ pontrendszer pontjait összekötő egyenesek közül legfeljebb hány felezheti a pontrendszert?

Lovász László még 1971-ben igazolta, hogy egy $2n$ elemű pontrendszer felező egyeneseinek száma legfeljebb $2n\sqrt{2n}$. Bár időközben több alternatív bizonyítás született, ezt az eredményt nagyon sokáig nem sikerült megjavítani. Így nem csoda, hogy Pach János, Bill Steiger és Szemerédi Endre 1992-ben publikált hajszálnyi élesítésére a terület szakértői mind felkapták a fejüket. Aztán 1997-ben Tamal Dey jóvoltából megtört a jég.

5.1. Tétel. *Tekintsünk egy $2n$ elemű $\mathcal{P}$ pontrendszert, ahol semelyik három pont nincs egy egyenesen. Ekkor a $\mathcal{P}$ pontrendszer pontjait összekötő egyenesek közül a pontrendszer felező egyeneseinek száma legfeljebb $8n^{4/3}$.*

Megjegyezzük, hogy néhány hónapja Tóth Géza olyan $2n$ elemű pontrendszereket talált, amelyekben a pontokat összekötő egyenesek közül legalább $ne^{c_8\sqrt{\log n}}$ felezi a pontrendszert, alkalmas c_8 pozitív konstanssal. A tételben szereplő felső korlát sajnos ennél lényegesen nagyobb.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $\mathcal{P}$ pontrendszer pontjainak x koordinátái mind különbözők. Definiáljunk egy G irányított topológiai gráfot a következőképpen. A gráf csúcsainak halmaza legyen $\mathcal{P}$, irányított éleinek halmaza pedig álljon azon szakaszokból, amelyeket a pontrendszer pontjai a pontrendszer felező egyeneseiből metszenek ki, minden ilyen szakaszt balról jobbra irányítva. A G gráf tetszőleges e élére jelölje $m(e)$ az e él egyenesének meredekségét.

A G gráf irányított éleinek halmazán bevezetünk egy ρ relációt. A G gráf két e és f irányított élére $(e,f)\in\rho$ pontosan akkor álljon fenn, ha e végpontja megegyezik f kezdőpontjával, $m(e)>m(f)$, továbbá e végpontja nem kezdőpontja egyetlen olyan h irányított élnek sem, amelyre $m(e)>m(h)>m(f)$.

Vegyük sorra a G gráf néhány érdekes tulajdonságát.

5.2. Állítás. *Ha e és f két olyan közös végpontú irányított éle a G gráfnak, melyekre $m(e) > m(f)$, akkor a G gráfban található olyan h irányított él, amelynek kezdőpontja megegyezik e és f közös végpontjával, amelyre $m(e) > m(h) > m(f)$ és amelyre $(e, h) \in \rho$. Hasonlóan, ha e' és f' két olyan közös kezdőpontú irányított éle a G gráfnak, melyekre $m(e') > m(f')$, akkor a G gráfban található olyan h' irányított él, amelynek végpontja megegyezik e' és f' közös kezdőpontjával, amelyre $m(e') > m(h') > m(f')$ és amelyre $(h', f') \in \rho$.*

Bizonyítás. Tekintsük a G gráf két olyan közös végpontú e és f irányított élét, melyekre $m(e) > m(f)$. Jelölje p az e és f élek közös végpontját. Forgassuk el az e él egyenesét a p pont körül az óramutató járásával megegyező irányban addig, míg ez a forgó l egyenes az f él egyenesével megegyező helyzetbe nem kerül. Vegyük észre, hogy amikor az l egyenes a $\mathcal{P}$ pontrendszer egy olyan pontján halad át, amely a p ponttól balra van, akkor az l egyenes fölött lévő pontok száma eggyel csökken, míg ha a $\mathcal{P}$ pontrendszer egy olyan pontján halad át, amely a p ponttól jobbra van, akkor az l egyenes fölött lévő pontok száma eggyel nő. Most figyelembe véve, hogy az l egyenes fölött lévő pontok száma az e él elhagyását követő pillanatban $n-1$, míg az f él elérését megelőző pillanatban n, ezért e két helyzet között az l egyenesnek szükségképpen át kell haladni a $\mathcal{P}$ pontrendszernek egy a p ponttól jobbra elhelyezkedő olyan pontján, amelynél az l egyenes fölött lévő pontok száma $(n-1)$-ről n-re nő. Az ilyen tulajdonságú pontok közül jelölje q azt, amelyiken az l egyenes legelőször halad át. Ekkor a p kezdőpontú és q végpontú irányított szakasz nyilván éle a G gráfnak, ráadásul ha h jelöli ezt az élt, akkor $m(e) > m(h) > m(f)$ és $(e, h) \in \rho$ is fennáll.

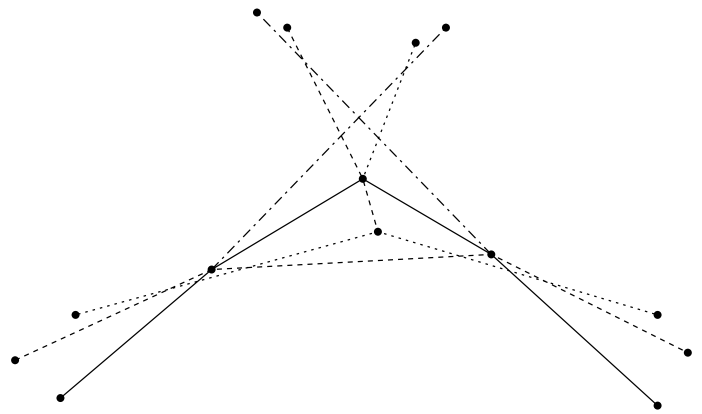
Az állítás második része hasonlóan igazolható. □

5.3. Állítás. *Ha a G gráf e, f, h éleire $(e, h) \in \rho$ és $(f, h) \in \rho$ is fennáll, akkor $e = f$.*

Bizonyítás. Ha $m(e) > m(f)$, akkor a 5.2. Állítás szerint e és f közös végpontja egyben kezdőpontja G egy olyan h' irányított élének, melyre $m(e) > m(h') > m(f)$. Másrészt ρ definíciójából adódóan $m(f) > m(h)$. Ennélfogva $m(e) > m(h') > m(h)$, vagyis $(e, h) \notin \rho$, ami ellentmondás. Hasonlóan, ha $m(f) > m(e)$, akkor $(f, h) \notin \rho$, ami szintén ellentmondás. □

Tekintsük a G gráf egy tetszőleges e_1 élét. Ha a G gráfnak létezik olyan e_2 éle, amelyre $(e_1, e_2) \in \rho$, akkor kapcsoljuk hozzá ezt az élt az e_1 élhez. Most tekintsük az e_2 élt. Ha a G gráfnak létezik olyan e_3 éle, amelyre $(e_2, e_3) \in \rho$, akkor kapcsoljuk hozzá ezt az élt az e_1 és e_2 élekből álló lánchoz. Folytatva ezt az eljárást G éleinek egy olyan $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ konkáv láncához jutunk, ahol minden $1 \leq i \leq k-1$ esetén $(e_i, e_{i+1}) \in \rho$. Nevezzünk egy ilyen konkáv láncot maximálisnak, ha a G gráfnak nem létezik olyan e éle, amelyre $(e, e_1) \in \rho$ vagy $(e_k, e) \in \rho$ fennáll.

Jelölje $C_1, C_2, \ldots, C_j$ a G gráf éleiből készíthető összes lehetséges maximális konkáv láncot. Világos, hogy a G gráf minden éle hozzátartozik a $C_1, C_2, \ldots, C_j$ konkáv láncok legalább egyikéhez. Másrészt a 5.2. Állításból következik, hogy a $C_1, C_2, \ldots, C_j$ láncok baloldali végpontjai mind különbözők, ezért a 5.3. Állítással összhangban a $C_1, C_2, \ldots, C_j$ láncok közül semelyik kettőnek nem lehet közös éle. A 2. ábra egy 14 pontból álló példán mutatja be az eddig elmondottakat.



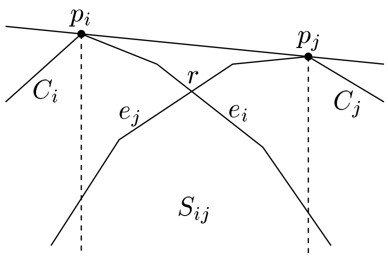
2. ábra. Maximális konkáv láncok.

Megmutatjuk, hogy a $C_1, C_2, \ldots, C_j$ maximális konkáv láncok száma legfeljebb n. Mint már említettük, a $C_1, C_2, \ldots, C_j$ láncok baloldali végpontjai mind különbözők. Így elég megmutatni, hogy ha $\mathcal{P}$ pontjait az x koordináták szerint növekvő sorrendbe rendezzük, akkor a láncok baloldali végpontjai a pontrendszer első n pontja közül kerülnek ki. Indirekt tegyük fel, hogy ez nem így van, vagyis mondjuk a C_1 maximális konkáv lánc baloldali p végpontja előtt a pontrendszernek legalább n pontja található. Jelölje a C_1 lánc p-ből induló élét e. Forgassuk el az e él egyenesét a p pont körül az óramutató járásával ellentétes irányban addig, míg ez a forgó l egyenes függőleges helyzetbe nem kerül. Vegyük észre, hogy amikor az l egyenes a $\mathcal{P}$ pontrendszer egy olyan pontján halad át, amely a p ponttól balra van, akkor az l egyenes fölött lévő pontok száma eggyel nő, míg ha a $\mathcal{P}$ pontrendszer egy olyan pontján halad át, amely a p ponttól jobbra van, akkor az l egyenes fölött lévő pontok száma eggyel csökken. Most figyelembe véve, hogy az l egyenes fölött lévő pontok száma az e él elhagyását követő pillanatban $n-1$, míg a függőleges helyzet elérését megelőző pillanatban legalább n, ezért e két helyzet között az l egyenesnek szükségképpen át kell haladni a $\mathcal{P}$ pontrendszernek egy a p ponttól balra elhelyezkedő olyan pontján, amelynél az l egyenes fölött lévő pontok száma $(n-1)$-ről n-re nő. Az ilyen tulajdonságú pontok közül jelölje q azt, amelyiken az l egyenes legelőször halad át. Ekkor a q kezdőpontú és p végpontú irányított szakasz nyilván éle a G gráfnak és ha e' jelöli ezt az élt, akkor ráadásul $(e', e) \in \rho$ is fennáll, vagyis C_1 nem maximális konkáv ív, ellentmondás.

Vizsgáljuk meg, hogy a $C_1, C_2, \ldots, C_j$ maximális konkáv láncok egymáshoz képest hogyan helyezkednek el. Tekintsük a pontrendszer két különböző p_i és p_j pontját, amelyek közül mondjuk a p_i pont a p_j ponttól balra helyezkedik el. Tegyük fel, hogy a p_i pont a jobboldali végpontjaiktól különböző pontja mondjuk a C_{i_1} és C_{i_2} láncoknak, a p_j pont a baloldali végpontjaiktól különböző pontja mondjuk a C_{j_1} és C_{j_2} láncoknak, továbbá a $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{j_1}, C_{j_2}$ láncok mindegyike a p_i és p_j pontokat összekötő egyenes alatt van. Megmutatjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $i_1 = i_2$ és $j_1 = j_2$. Indirekt tegyük fel, hogy például $i_1 \neq i_2$. Jelölje e_{i_1} és e_{i_2} rendre a C_{i_1} és C_{i_2} láncok p_i-ből induló éleit. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $m(e_{i_1}) > m(e_{i_2})$. A 5.2. Állítás szerint ekkor létezik a G gráfnak olyan e éle, amelyre $m(e_{i_1}) > m(e) > m(e_{i_2})$ és amelyre $(e, e_{i_2}) \in \rho$. Ez viszont azt jelenti, hogy a C_{i_2} láncban az e_{i_2} élt megelőző él a p_i és p_j pontokat összekötő egyenes fölött van, ami ellentmondás. Hasonlóan adódik, hogy ha $j_1 \neq j_2$, akkor a C_{j_1} és C_{j_2} láncok valamelyikében a p_j pontból induló él a p_i és p_j pontokat összekötő egyenes fölött van, ami szintén nem lehetséges.

Tekintsük ismét a pontrendszer két különböző p_i és p_j pontját, és tegyük fel, hogy a p_i pont illeszkedik mondjuk a C_i láncra, a p_j pont illeszkedik mondjuk a C_j láncra, a C_i és C_j láncok különbözők, továbbá mindkettő a p_i és p_j pontokat összekötő egyenes alatt van. Ilyenkor a $p_i p_j$ egyenest a C_i és C_j láncok közös érintőjének fogjuk nevezni. Megmutatjuk, hogy most a C_i és C_j láncoknak legfeljebb egy közös pontja lehet a p_i és p_j pontokon átmenő függőleges egyenesek által határolt S_{ij} (nyílt) sávban. Ha a láncoknak nincs közös pontjuk az S_{ij} sávban, akkor nincs mit bizonyítanunk, ezért tegyük fel, hogy mondjuk a C_i lánc e_i élének és a C_j lánc e_j élének r közös pontja az S_{ij} sávban van (ld. 3. ábra).

Mivel a p_j pont az e_i él egyenese fölött van, ezért ugyanez fennáll az $\overline{rp_j}$ szakaszra és így a C_j lánc r és p_j között elhelyezkedő ívére is. Másrészt a C_i lánc nyilván az e_i él egyenese alatt van, ennélfogva a C_i és C_j láncoknak az r és



3. ábra. Maximális konkáv láncok metszéspontjai.

p_j pontokon átmenő függőleges egyenesek által határolt (nyílt) sávban biztosan nincs közös pontja. Hasonlóan adódik, hogy a C_i és C_j láncoknak az r és p_i pontokon átmenő függőleges egyenesek által határolt (nyílt) sávban sincs közös pontja.

Ezek után legyen e_i és e_j a G gráf két metsző éle (idézzük fel, közös végpontú élek nem számítanak metszőknek). Jelölje C_i és C_j rendre azt a két maximális konkáv láncot, amelyek tartalmazzák az e_i és e_j éleket. Tekintsük a C_i és C_j láncok csúcsainak egyesítésével keletkező pontrendszer konvex burkának felső ívén az e_i és e_j élek metszéspontján átmenő függőleges egyenes által metszett szakaszt és rendeljük hozzá ennek a szakasznak az egyenesét az e_i és e_j élek metszéspontjához. Ez az egyenes nyilván a C_i és C_j láncok közös érintője. A $C_1, C_2, \dots, C_j$ maximális konkáv láncok egymáshoz képesti helyzetére vonatkozó észrevételeinkből azonnal következik, hogy ha e'_i és e'_j szintén két metsző éle a G gráfnak, akkor a hozzájuk rendelt egyenes csak akkor egyezhet meg az e_i és e_j élekhez rendelt egyenessel, ha $\{e_i, e_j\} = \{e'_i, e'_j\}$. Innen rögtön adódik, hogy a metsző élpárok száma nem haladhatja meg a $C_1, C_2, \dots, C_j$ maximális konkáv láncok közös érintőinek számát. Mivel a maximális konkáv láncok száma legfeljebb n, így a $\mathcal{P}$ pontrendszer bármely p pontjára a p pontot a p-től jobbra lévő pontokkal összekötő egyenesek közül legfeljebb $n-1$ lehet két konkáv lánc közös érintője. Ennélfogva a közös érintők száma, és így G metsző élpárjainak száma is legfeljebb $2n(n-1)$. Most ha F jelöli a G gráf éleinek számát, akkor a 4.1. Tétellel összhangban

$$2n(n-1) \geq \frac{1}{64}\frac{F^3}{(2n)^2} - 2n,$$

ahonnan $F \leq 8n^{4/3}$ azonnal adódik. $\square$

Hivatkozások

[1] Ajtai, M., Chvátal, V., Newborn, M. M., Szemerédi, E.: Crossing-free subgraphs. *Annals of Discrete Mathematics,* **12** (1982), 9-12.

[2] Chung, F. R. K., Szemerédi, E., Trotter, W. T.: The number of different distances determined by a set of points in the Euclidean plane. *Discrete and Computational Geometry,* **7** (1992), 1-11.

[3] Clarkson, K., Edelsbrunner, H., Guibas, L., Sharir, M., Welzl, E.: Combinatorial complexity bounds for arrangements of curves and spheres. *Discrete and Computational Geometry,* **5** (1990), 99-160.

[4] Dey, T. K.: Improved bounds for planar k-sets and related problems. *Discrete and Computational Geometry,* **19** (1998), 373-382.

[5] Erdős, P.: On sets of distances of n points. *American Mathematical Monthly,* **53** (1946), 248-250.

[6] Erdős, P., Makai, E., Pach, J., Spencer, J.: Gaps in difference sets and the graph of nearly equal distances. *Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift,* American Mathematical Society, 1991, pp. 265-273.

[7] Harborth, H.: Solution to problem 664A. *Elemente der Mathematik,* **29** (1974), 14-15.

[8] Lovász, L.: On the number of halving lines. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica,* **14** (1971), 107-108.

[9] Pach, J., Steiger, W., Szemerédi, E.: An upper bound on the number of planar k-sets. *Discrete and Computational Geometry,* **7** (1992), 109-123.

[10] Spencer, J., Szemerédi, E., Trotter, W. T.: Unit distances in the Euclidean plane. *Graph Theory and Combinatorics,* Academic Press, 1984, pp. 293-308.

[11] Sutherland, J.: Solution to problem 167. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung,* **45** (1935), 33-34.

[12] Szemerédi, E., Trotter, W. T.: Extremal problems in discrete geometry. *Combinatorica,* **3** (1983), 381-392.

[13] Székely, L.: Crossing numbers and hard Erdős problems in discrete geometry. *Combinatorics, Probability and Computing,* **6** (1997), 353-358.

[14] Tóth, G.: Point sets with many k-sets. *Discrete and Computational Geometry.* Közlésre elfogadva.