Klasszikus képtár problémák II

Szabó László
Magyar Tudományos Akadémia,
Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet,
1111 Budapest,
Lágymányosi u. 11.

2000. május 2.

1. Bevezetés

A következő problémát V. Klee tűzte ki 1973-ban. Egy képzőművészeti kiállításon értékes festményeket mutatnak be. Határozzuk meg, hogy a falak számának függvényében hány teremőr szükséges a képek védelméhez. A kérdést V. Chvátal [2] hamarosan megválaszolta; egy n oldalú sokszög alaprajzú képtárhoz $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ őr mindig elég és alkalmanként szükséges is. Ez a szép és teljesen elemi tétel problémák egész sorát indította el, melyek egy része máig is nyitott. A Polygon egy korábbi számában már megjelent a szerzőnek egy összefoglaló tanulmánya a témáról (ld. [13]). Ebben a második részben egy a fent említett cikkben csak érintőlegesen tárgyalt nagyon fontos speciális sokszögosztályra, az ortogonális sokszögekre vonatkozó legismertebb eredményeket szeretnénk bemutatni.

2. Ortogonális képtár probléma

Egy P egyszerű sokszöget ortogonálisnak nevezünk, ha oldalai párhuzamosak a sík valamely két, egymásra merőleges egyenesével, például a koordináta tengelyekkel. Világos, hogy egy ortogonális sokszög oldalai felváltva vízszintesek és függőlegesek, továbbá minden szöge $\frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2}$.

2.1. Állítás. *Egy n oldalú, r konkáv szöget tartalmazó ortogonális sokszögben $n = 2r + 4$.*

Bizonyítás. Mivel a sokszög belső szögeinek összege $(n-2)\pi$, ezért

$$r\tfrac{3\pi}{2}+(n-r)\tfrac{\pi}{2}=(n-2)\pi,$$

ahonnan $n=2r+4$. □

Emlékeztetünk rá, hogy az általános képtárprobléma megoldásánál alapvető szerepet játszott az a tény, hogy bármely egyszerű sokszöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre lehet bontani. Ez persze fennáll ortogonális sokszögekre is, sőt ennél sokkal több is igaz.

2.2. Tétel (Kahn - Klawe - Kleitman, 1983). *Bármely ortogonális sokszög, egymást nem metsző átlókkal, konvex négyszögekre bontható.*

Azonban ennek a tételnek a direkt bizonyítása rendkívül bonyolult és hosszadalmas. Ám A. Lubiw kicsit általánosítva az ortogonális sokszög fogalmát, a bővebb sokszögosztályra lényegesen egyszerűbb módon igazolta az analóg állítást. Mi is ezt az utat fogjuk követni.

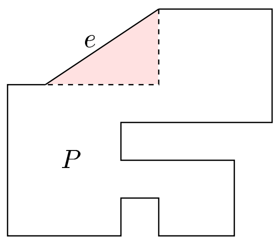
Először bevezetjük az 1-ortogonális sokszög fogalmát. Egy P egyszerű sokszöget 1-ortogonális sokszögnek nevezünk, ha

(1) oldalainak száma páros,

(2) eltekintve esetleg egy előre kiválasztott speciális e oldaltól, az oldalak felváltva vízszintesek illetve függőlegesek,

(3) minden belső szöge legfeljebb $\frac{3\pi}{2}$,

(4) az e élhez, mint átfogóhoz tartozó, a koordináta tengelyekkel párhuzamos oldalú, a sokszög felé néző derékszögű háromszög belsejében nincsenek csúcsok (ld. 2.1. ábra).



2.1. ábra

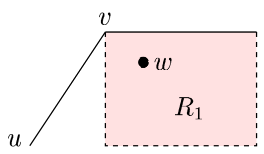
2.3. Tétel (Lubiw, 1985). *Bármely 1-ortogonális sokszög, egymást nem metsző átlókkal, konvex négyszögekre bontható.*

Bizonyítás. A tételt a sokszög n oldalszáma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 4$, akkor az állítás magától értetődik, mivel minden 1-ortogonális négyszög konvex. Ezért legyen $n \geqslant 6$, és tegyük fel, hogy minden n-nél kevesebb oldalú sokszög egymást nem metsző átlókkal konvex négyszögekre bontható.

Most tekintsünk egy n oldalú 1-ortogonális P sokszöget. Az (1) és (2) tulajdonságok miatt az $e = uv$ oldalhoz csatlakozó oldalak közül vagy mindkettő vízszintes, vagy mindkettő függőleges. Így felhasználva a (3) tulajdonságot, egy alkalmas egybevágósági transzformációtól eltekintve csak a 2.2. ábrán látható két eset lehetséges. Vegyük észre, hogy v mindig a felső oldal baloldali végpontja.

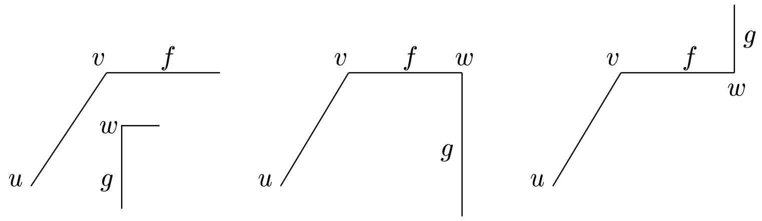
2.2. ábra

A w csúcs legyen a 2.3. ábrán látható R_1 tartományban lévő legbaloldalibb, azon belül pedig a legmagasabban fekvő csúcs. Itt az R_1 tartomány felülről és balról zárt, a baloldali két csúcsot nem tartalmazza, a többi oldalon pedig nyílt.



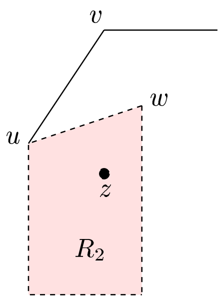
2.3. ábra

Mivel a v-ből induló f oldal jobboldali végpontja R_1-ben van, a w csúcs egyértelműen meghatározott. Most három esetet különböztethetünk meg (ld. 2.4. ábra).



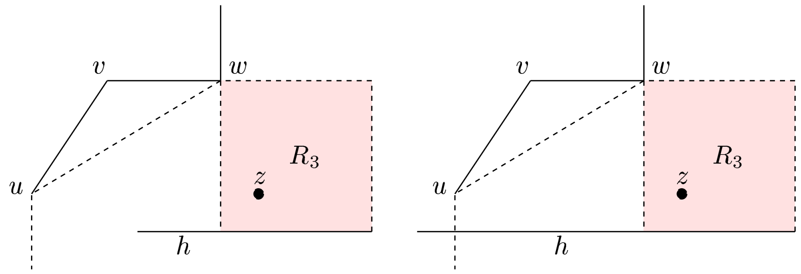
2.4. ábra

Ezután a z csúcs legyen a 2.5. ábrán látható R_2 tartományban a legmagasabban fekvő, azon belül pedig a legjobboldalibb csúcs. Az R_2 tartomány felülről és jobbról zárt, a felső csúcsokat nem tartalmazza, a többi oldalon pedig nyílt.



2.5. ábra

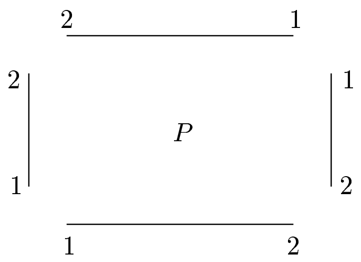
Ha a 2.4. ábrán látható első két eset valamelyike áll fenn, akkor a w-ből induló g oldal alsó végpontja R_2-ben van, következésképpen z egyértelműen meghatározott. Ha viszont a harmadik eset áll fenn, akkor lehetséges, hogy z egy az R_2-be belógó valamilyen h oldal baloldali végpontja, sőt az is elképzelhető, hogy R_2 egyáltalán nem tartalmaz további csúcsokat. Ez utóbbi két esetben z legyen a 2.6. ábrán látható R_3 tartományban lévő legbaloldalibb, azon belül pedig a legalacsonyabban fekvő csúcs. Itt az R_3 tartomány balról és alulról zárt, a baloldali csúcsokat nem tartalmazza, a többi oldalon pedig nyílt. Mivel a h oldal jobboldali végpontja R_3-ban van, így z egyértelműen meghatározott.



2.6. ábra

Most tekintsük az $uvwz$ négyszöget. Ez a négyszög a w és z csúcsok megválasztása miatt nyilván konvex, továbbá a P sokszögben helyezkedik el. Eltávolítva P-ből az $uvwz$ négyszöget általában három, n-nél kevesebb oldalú sokszöget kapunk. Megmutatjuk, hogy ezek is 1-ortogonálisak.

A (2) és (3) tulajdonságok automatikusan teljesülnek, (4) pedig a w és z csúcsok speciális megválasztásából következik. Az (1) tulajdonság igazolásához jelöljük meg P vízszintes illetve függőleges oldalainak végpontjait a 2.7. ábrának megfelelően.

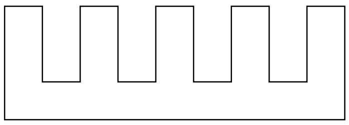


2.7. ábra

Könnyű ellenőrizni, hogy a P csúcsaihoz rendelt számok egyértelműek, és körbejárva P-t a különböző jelű csúcsok felváltva helyezkednek el. Továbbá vegyük észre, hogy u jele 1, v jele 2, w jele 1, z jele pedig 2, ismételten a w és z csúcsok speciális megválasztása miatt. Ennélfogva a részsokszögek határán is felváltva következnek a különböző jelű csúcsok, így a részsokszögek oldalszáma is páros.

Most alkalmazva az indukciós feltevést ezen részsokszögekre, a P sokszög egy az $uvwz$ négyszöget is tartalmazó konvex négyszögekre való felbontásához jutunk. □

Mielőtt rátérnénk az ortogonális képtárprobléma megoldására elvenítsünk fel néhány fogalmat. Legyen P tetszőleges ortogonális sokszög, és tüntessük ki P bizonyos pontjait, melyeket a továbbiakban teremőrőknek fogunk tekinteni. Azt mondjuk, hogy egy q teremőr látja a P sokszög valamely p pontját, ha a pq szakasz teljes egészében P-ben helyezkedik el. Továbbá teremőrök egy $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ csoportjáról azt mondjuk, hogy védelmezi a P sokszöget, ha minden $p \in P$ ponthoz létezik olyan $q_i \in Q$ teremőr, amelyik látja p-t. A probléma ezekután az őrök minimális számának meghatározása tetszőleges ortogonális sokszög esetén. A 2.8. ábrán látható n-szög mutatja, hogy ez a minimum legalább $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ minden n-re.



2.8. ábra

Megmutatjuk, hogy ennél több őrre soha nincs szükség.

2.4. Tétel (Kahn - Klawe - Kleitman, 1983). *Bármely n oldalú ortogonális sokszög védelméhez $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ teremőr mindig elég.*

Bizonyítás. Bontsuk a sokszöget konvex négyszögekre. Jelölje ezt a felbontást Q, a felbontás duális gráfját pedig G. Világos, hogy G fa, így G-nek van elsőfokú csúcsa.

A sokszög n oldalszáma szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a Q felbontásból, a felbontásban szereplő négyszögek átlóinak hozzáadásával keletkező Q^* gráf szögpontjai 4-színezhetők. Ez $n = 4$ esetén nyilvánvaló, ha pedig $n > 4$, akkor töröljük Q^*-ból a G gráf valamely elsőfokú csúcsának megfelelő q négyszöget. Az indukciós feltevés szerint a maradék 4-színezhető, így visszahelyezve a q négyszöget, annak még színezetlen csúcsait színezzük a másik két csúcstól (és persze egymástól is) különböző színűre.

Végezetül azokba a csúcsokba állítsuk őreinket, amelyek színe a 4-színezésben a legkevesebb alkalommal fordul elő. $\square$

Az ortogonális képtár tételre még két bizonyítás ismert, melyek alapötlete lényegesen különbözik a Kahn-Klawe-Kleitman féle bizonyításétól. Az egyiket O'Rourke találta, a másikat pedig Győri Ervin. Mindkét gondolatmenet nagyon tanulságos, ezért mindkettővel részletesen foglalkozunk.

2.5. Tétel (O'Rourke, 1983). *Bármely $n \geqslant 6$ oldalú ortogonális sokszög védelméhez $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, kizárólag konkáv csúcsba állított őr mindig elég.*

Bizonyítás. A 2.1. Állítással összhangban azt kell megmutatni, hogy bármely, r konkáv csúcsú ortogonális sokszög védhető $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1$, konkáv csúcsba állított őrrel. Ezt a konkáv csúcsok r száma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $r = 1$, akkor nincs mit bizonyítani. Ezért legyen $r > 1$, és tegyük fel, hogy minden r-nél kevesebb konkáv csúcsot tartalmazó ortogonális sokszögre igaz az állítás. Most tekintsünk egy r konkáv csúcsú P ortogonális sokszöget.

1. ESET: Létezik két olyan konkáv csúcs, amelyek összeköthetők a P határát nem metsző vízszintes vagy függőleges szakasszal. Vágjuk ketté a sokszöget e szakasz mentén, és jelölje r_1 valamint r_2 a két rész konkáv csúcsainak számát. Mivel $r_1+r_2+2 = r$, alkalmazva az indukciós feltevést a részsokszögekre kapjuk, hogy P védhető

$$\left\lfloor \frac{r_1}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{r_2}{2} \right\rfloor + 1 \leqslant \left\lfloor \frac{r_1 + r_2 + 2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$$

konkáv csúcsban álló őrrel (ha valamelyik lépésben egy téglalapot vágunk le, akkor ezt a téglalapot olyan csúcsával védjük, amely az eredeti sokszögben konkáv csúcs).

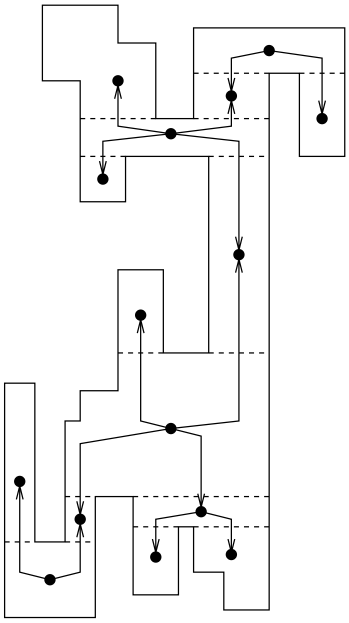
2. ESET: Semelyik két konkáv csúcs sem köthető össze a P határát nem metsző vízszintes vagy függőleges szakasszal. Ekkor, mint azt a 2.6. Tételben látni fogjuk, létezik olyan konkáv csúcsa P-nek, hogy a belőle induló vízszintes vagy függőleges szakasz a sokszöget két olyan részre vágja, melyek legalább egyikében a konkáv csúcsok száma páratlan. Vágjuk ketté a sokszöget egy ilyen szakasz mentén, és jelölje r_1 valamint r_2 a két rész konkáv csúcsainak számát. Legyen ezek közül például r_1 páratlan. Most $r_1+r_2+1 = r$, így alkalmazva az indukciós feltevést a részsokszögekre, kapjuk, hogy P védhető

$$\left\lfloor \frac{r_1}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{r_2}{2} \right\rfloor + 1 \leqslant \left\lfloor \frac{r_1 + r_2 + 1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1$$

konkáv csúcsban álló őrrel (itt is ha valamelyik lépésben egy téglalapot vágunk le, akkor ezt a téglalapot olyan csúcsával védjük, amely az eredeti sokszögben konkáv csúcs). □

2.6. Tétel (O'Rourke, 1983). *Legyen P tetszőleges ortogonális sokszög, és tegyük fel, hogy P semelyik két konkáv csúcsa sem köthető össze a sokszög határát nem metsző vízszintes vagy függőleges szakasszal. Ekkor létezik olyan* *konkáv csúcsa P-nek, hogy a belőle induló vízszintes vagy függőleges szakasz a sokszöget két olyan részre vágja, melyek legalább egyikében a konkáv csúcsok száma páratlan (feltéve persze, hogy P tartalmaz legalább két konkáv csúcsot).*

Bizonyítás. Ezt a tételt több lépésben igazoljuk. A jobb áttekinthetőség kedvéért minden egyes lépést külön állításként fogalmazunk meg. Mindenekelőtt szükségünk lesz néhány definícióra. Nevezzük vágásnak azt az eljárást, mikor egy ortogonális sokszög valamely konkáv csúcsából induló vízszintes vagy függőleges szakasszal a sokszöget két részre bontjuk. Egy vágást páratlannak mondunk, ha a kapott részsokszögek legalább egyike páratlan számú konkáv csúcsot tartalmaz. Ha P-ben a konkáv csúcsok száma páros, akkor nyilván bármelyik vágás páratlan lesz. Ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a konkáv csúcsok száma páratlan. A vízszintes vágásokat röviden V-vágásoknak, míg a függőlegeseket F-vágásoknak fogjuk nevezni. A bizonyítás egy a sokszög V-vágások által definiált speciális ortogonális felbontásának részletes diszkussziója. Mondjuk azt, hogy egy konkáv csúcs V-izolált, ha az ahhoz csatlakozó vízszintes él másik végpontja nem konkáv csúcs. Különben pedig nevezzük egy V-pár egy tagjának.



2.9. ábra

Bontsuk fel P-t pontosan azokkal a V-vágásokkal, amelyek V-párok tagjaihoz illeszkednek. Ekkor kizárólag azok a konkáv csúcsok nem tűnnek el, amelyek V-izoláltak. Azt fogjuk megmutatni, hogy vagy létezik páratlan V-vágás, vagy pedig pontosan egy V-izolált csúcs van P-ben. Ebből a célból rendeljünk hozzá a felosztáshoz egy irányított gráfot a következőképpen. Minden részsokszög feleljen meg egy csúcsnak, és a gráf egy A csúcsból akkor és csak akkor menjen egy irányított él a B csúcsba, ha

(1) A és B olyan szomszédos részsokszögeknek felelnek meg, amelyeket csak egy V-vágás választ el,

(2) a V-vágásnak megfelelő V-pár az A-nak megfelelő részsokszög határán van.

Az így kapott gráfot nevezzük a felosztás V-gráfjának (ld. 2.9. ábra).

2.7. Állítás. *Egy ortogonális sokszög fent definiált felosztásának V-gráfjában csak a következő négy típusú csúcs fordulhat elő.*

név	*BE-fok*	*KI-fok*
levél	1	0
ág	1	2
forrás	0	2 *vagy* 4
nyelő	2	0

Bizonyítás. Mivel a sokszög semelyik két konkáv csúcsa sem köthető össze a sokszög határát nem metsző vízszintes szakasszal, ezért minden részsokszög határán legfeljebb két V-pár, és így legfeljebb négy V-vágás lehet. Ebből következik, hogy egyik csúcs foka sem nagyobb, mint 4. Az élek irányításának definíciója szerint olyan csúcs nem létezhet, melyből páratlan számú él megy ki. Hasonlóan nem létezhetnek olyan csúcsok sem, amelyekbe kettőnél több él megy be. Így minden elsőfokú csúcs szükségképpen levél, a másodfokú csúcsok pedig vagy források vagy nyelők. A harmadfokú csúcsok csak ágak lehetnek. Végül a negyedfokú csúcsok határán két V-pár van, következésképpen ezek források. □

Megmutatjuk, hogy ha egy ortogonális sokszögben nincs páratlan V-vágás, akkor annak V-gráfja viszonylag speciális szerkezetű.

2.8. Állítás. *Ha egy ortogonális sokszög V-gráfja tartalmaz nyelőt, akkor a sokszögben létezik páratlan V-vágás.*

Bizonyítás. Legyen S a nyelőnek megfelelő részsokszög, és jelölje C_- valamint C_+ az S határán lent és fent lévő V-vágásokat. Tegyük fel, hogy az S-beli V-izolált csúcsok száma k. Azt is tegyük fel, hogy az eredeti sokszög (szigorúan) C_+ feletti részében u konkáv szög van. Ha u páratlan, akkor C_+ nyilván egy páratlan V-vágás. Ha pedig u páros, akkor $k > 0$ esetén az S legmagasabban lévő V-izolált csúcsából kiinduló vágás, $k = 0$ esetén meg egyszerűen C_- lesz egy páratlan V-vágás. □

Ebből az is következik, hogy ha egy ortogonális sokszögben nincs páratlan V-vágás, akkor annak V-gráfja pontosan egy forrást tartalmaz, hiszen két forrás között mindenképpen lenne nyelő. Ezért a V-gráf egy bináris fa (esetleg a gyökértől eltekintve, amely a forrás csúcs), és e fa élei a levelek felé vannak irányítva.

2.9. Állítás. *Ha egy ortogonális sokszögben nincs páratlan V-vágás, akkor annak pontosan egy V-izolált csúcsa van, és ez a csúcs a forrásnak megfelelő részsokszögben helyezkedik el.*

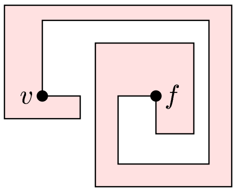
Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy sem ágon, sem levélen nem lehet V-izolált csúcs. Ezt a legközelebbi levélhez menő (irányított) út hossza szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Tegyük fel, hogy egy L levélen $k > 0$ számú V-izolált csúcs van. Legyen C az F-hez tartozó egyetlen V-vágás. Ha most k páratlan, akkor C maga egy páratlan vágás, páros k esetén pedig L-nek a C-hez legközelebbi V-izolált csúcsából kiinduló vízszintes szakasz határoz meg páratlan vágást. Ezekután tegyük fel, hogy semelyik $d' < d$ távolságra lévő ág vagy levél sem tartalmaz V-izolált csúcsot, és tekintsünk egy d távolságra lévő B ágat. Legyen C a bejövő élnek megfelelő V-vágás és jelölje $k > 0$ a V-izolált csúcsok számát B-ben. Ha k páratlan, akkor C egy páratlan vágás, hiszen az indukciós feltevés szerint B után már nincsenek V-izolált csúcsok, a többi konkáv csúcs pedig V-párokat alkot. Ha k páros, akkor meg B-nek a C-hez legközelebbi V-izolált csúcsából húzható egy vízszintes páratlan vágás.

Végül megmutatjuk, hogy az S forrás pontosan egy V-izolált csúcsot tartalmaz. Feltevésünk szerint P konkáv csúcsainak száma páratlan, ezért az S-beli V-izolált csúcsok k száma is szükségképpen páratlan (hiszen a többi konkáv csúcs V-párokban van). Ha most $k > 1$, akkor a C-hez második legközelebbi V-izolált csúcsból húzható páratlan V-vágás. Ebből következik, hogy $k = 1$. □

Az előző három állítás világos, hogy V-vágások helyett F-vágásokra is igaz lesz. Ezért ha egy P ortogonális sokszögben nem létezik sem páratlan V-vágás, sem pedig páratlan F-vágás, akkor P-nek pontosan egy V-izolált és pontosan egy F-izolált csúcsa van a V-gráf illetve az F-gráf forrás szögpontjaiban. Ám ez lehetetlen.

2.10. Állítás. *Egy $r \geqslant 3$ konkáv csúcsú P ortogonális sokszögben nem lehet egyetlen V-izolált csúcs a V-gráf forrás szögpontjában és egyetlen F-izolált csúcs az F-gráf forrás szögpontjában.*

Bizonyítás. Legyen v és f a kérdéses két izolált csúcs. Ekkor minden más konkáv csúcs (legalább még egy van, hisz $r \geqslant 3$) tagja egy V-párnak és egy F-párnak is. Ebből következik, hogy ezek a csúcsok P határán, v és f között egy láncot alkotva egymás után jönnek. Így a sokszög szükségképpen spirál alakú, mint azt a 2.10. ábra mutatja.



2.10. ábra

Vegyük azonban észre, hogy v a V-gráf, f pedig az F-gráf egy-egy levelén van. Ez pedig ellentmond annak, hogy v és f forrás szögpontokhoz tartoznak. □

Ezzel a 2.6. Tétel bizonyítása teljes. □

Megjegyezzük, hogy a 2.5. Tételben tulajdonképpen azt bizonyítottuk be, hogy egy n oldalú ortogonális sokszög mindig felbontható legfeljebb $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ négy illetve hat oldalú ortogonális sokszögre. Ráadásul ez úgy is megtehető, hogy mindig csak egyenes vágásokat engedünk meg. Ha ez utóbbi feltételtől eltekintünk, az állítás sokkal egyszerűbben is igazolható lesz.

2.11. Tétel (Győri, 1986). *Bármely n oldalú ortogonális sokszög felbontható legfeljebb $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ négy illetve hat oldalú ortogonális sokszögre. Következésképpen bármely n oldalú ortogonális sokszög védelméhez $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ teremőr mindig elég.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt jegyezzük meg, hogy a négy és a hat oldalú ortogonális sokszögek alakja egyértelműen meghatározott, az előbbi téglalap, az utóbbi pedig L alakú.

Ezekután a tételt a sokszög n oldalszáma szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 4$ vagy $n = 6$, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ezért legyen $n \geqslant 8$, és tegyük fel, hogy minden n-nél kevesebb oldalú sokszögre igaz az állítás. Most tekintsünk egy n oldalú P ortogonális sokszöget.

Ha létezik két olyan konkáv csúcs, amelyek összeköthetők egy a P határát nem metsző vízszintes vagy függőleges szakasszal, akkor ez a szakasz két n_1 és n_2 oldalú ortogonális sokszögre vágja P-t, ahol $n_1 + n_2 = n$. Alkalmazva az indukciós feltevést ezen részsokszögekre, a kívánt eredményt kapjuk.

Így a továbbiakban feltehető, hogy semelyik két konkáv csúcs sem köthető össze a sokszög határát nem metsző vízszintes vagy függőleges szakasszal.

Ha $n = 4k$, akkor tekintsük P valamely w konkáv csúcsát, és vágjuk szét P-t egy a w-ből induló vízszintes szakasszal két n_1 és n_2 oldalú ortogonális sokszögre. Ekkor $n_1 + n_2 = n + 2$, így alkalmazva az indukciós feltevést a részsokszögekre, P felbontható

$$\left\lfloor \frac{n_1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n_2}{4} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

négy illetve hat oldalú ortogonális sokszögre.

A továbbiakban legyen $n = 4k + 2$. Ekkor a 2.1. Állítás szerint a P sokszögnek $2k - 1$ konkáv és $2k + 3$ konvex csúcsa van. Alkalmazva a skatulya elvet, P-nek szükségképpen létezik két szomszédos x és y konvex csúcsa. Toljuk el az xy szakaszt önmagára merőlegesen a P belsejében addig, amíg P határához nem érünk. Jelölje az xy szakasz új helyzetét $x'y'$. Mivel P semelyik két csúcsa sem köthető össze a P határát nem metsző vízszintes vagy függőleges szakasszal, így az $xyx'y'$ téglalap kiemelésével P legfeljebb két részre eshet szét.

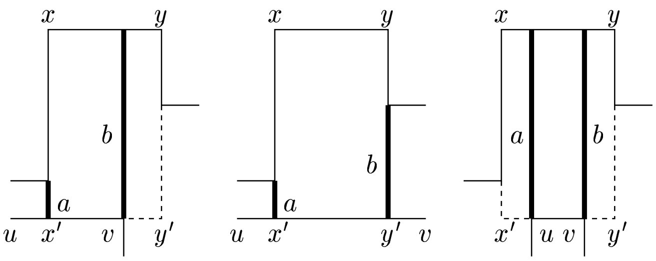
Először tegyük fel, hogy P két részre esett szét. Ekkor az $x'y'$ szakasz és az azt átfedő uv sokszögoldal kölcsönös elhelyezkedésére három lehetőség van.

(1) $x'y'$ és uv átfedik egymást.

(2) uv tartalmazza $x'y'$-t.

(3) $x'y'$ tartalmazza uv-t.

Mindhárom esetben a vastag vonallal jelölt a vagy b szakasz mentén vágjuk szét P-t (ld. 2.11. ábra).

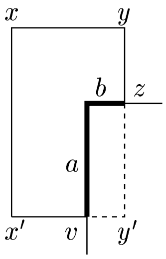


2.11. ábra

Ezen vágások közül az egyik biztosan olyan n_1 és n_2 oldalú sokszögeket eredményez, melyekre $n_1 = 4k_1 + 2$ és $n_2 = 4k_2 + 2$, ahol $k_1 + k_2 = k$. Alkalmazva az indukciós feltevést ezekre a részsokszögekre, éppen a kívánt eredményt kapjuk.

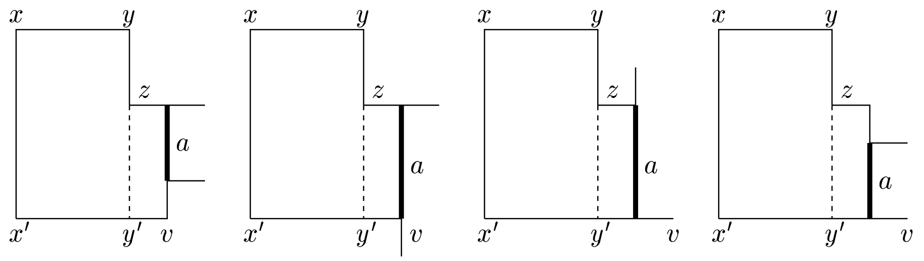
Ezekután azzal az esettel foglalkozunk, amikor P az $xyx'y'$ téglalap kivágása után is összefüggő marad. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy xx' oldala P-nek, továbbá $x' = u$.

1. ESET: $x'y'$ tartalmazza az $x'v$ oldalt, yy' pedig az yz oldalt. Vágjuk szét P-t az a és b szakaszokkal egy hat és egy $4k - 2$ oldalú sokszögre (ld. 2.12. ábra). Alkalmazva az indukciós feltevést e részsokszögekre, az állítás következik.



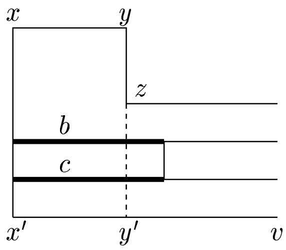
2.12. ábra

2. ESET: $x'v$ tartalmazza az $x'y'$ oldalt, yy' pedig az yz oldalt. Vágjunk le függőlegesen az a szakasszal egy L alakú darabot P-ből. Ha a két részre bontja a sokszöget (ld. 2.13. ábra), akkor alkalmazva az indukciós feltevést ezekre a részsokszögekre, éppen a kívánt eredményt kapjuk.



2.13. ábra

Ha pedig a három részre bontja P-t, akkor viszont a b és c vízszintes szakaszok valamelyike két $4k_1 + 2$ és $4k_2 + 2$ oldalú sokszögre vágja P-t, ahol $k_1 + k_2 = k$ (ld. 2.14. ábra). Most ezen részsokszögekre alkalmazva az indukciós feltevést, az állítás ismét adódik.



2.14. ábra

Ezzel a 2.11. Tétel bizonyítása teljes. □

A fenti bizonyítással kapcsolatban megjegyezzük, hogy az ortogonális sokszögek kisebb ortogonális sokszögekre való felbontása több szempontból is fontos kutatási terület. Az érdeklődő olvasónak figyelmébe ajánljuk Győri Ervin [6] kitűnő áttekintő cikkét. Ízelítőül lássunk egy szép eredményt.

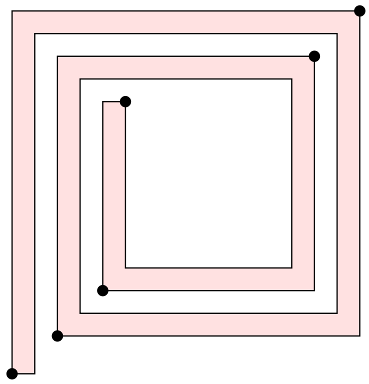
2.12. Tétel (Hoffmann, 1990). *Bármely n oldalú ortogonális sokszög, függetlenül a benne lévő lyukak számától, mindig felbontható $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ csillagszerű ortogonális sokszögre. Következésképpen bármely n oldalú ortogonális sokszög védelméhez, függetlenül a benne lévő lyukak számától, $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ őr mindig elég*

3. Erődítmény és börtönudvar problémák

D. Wood és J. Malkelvitch az eredeti képtárprobléma két érdekes változatát vetették fel, melyeket erődítmény illetve börtönudvar problémának neveztek el. Az elsőben azt vizsgáljuk, hogy hány őr szükséges egy ortogonális sokszög külsejének, míg a másodikban mind a külsejének, mind pedig a belsejének védelméhez. Az őröket mindkét esetben a sokszög csúcsaiban helyezzük el. Egy sokszög külsejének védelme a belső védelemhez teljesen hasonló módon definiálható. Mindössze annyit jegyzünk meg, hogy egy p külső pontról akkor mondjuk, hogy látható a sokszög egy q csúcsából, ha a pq szakasz diszjunkt a sokszög belsejétől.

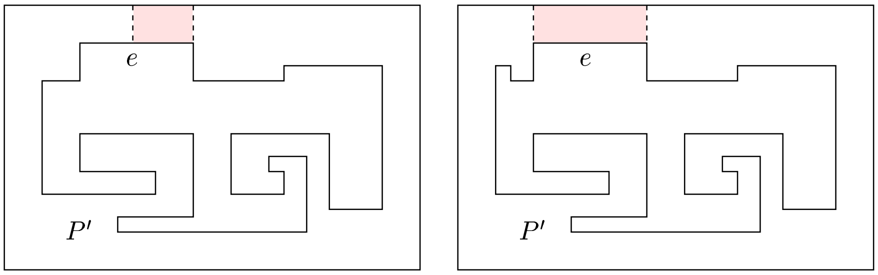
3.1. Tétel (Aggarwal, 1984). *Bármely n oldalú ortogonális sokszög külsejének védelméhez $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ őr mindig elég, és alkalmanként szükséges is.*

Bizonyítás. A szükségességet a 3.1. ábrán látható spirál alakú sokszög mutatja.



3.1. ábra

Az elégségesség igazolásához legyen P tetszőleges, n oldalú ortogonális sokszög, és jelölje e annak egyik legfelső vízszintes élét. Most vegyük körül P-t egy Q téglalappal, és attól függően, hogy $n = 4k$ vagy $n = 4k + 2$, tekintsük a 3.2. ábra bal iletve jobb oldalán látható, $n + 6$ illetve $n + 4$ oldalú P' ortogonális sokszöget.



3.2. ábra

A P' sokszög belseje, a besatírozott részt leszámítva nyilván megegyezik az eredeti P sokszög közvetlen környezetével. Most a 2.5. Tétel szerint P' belseje védhető $\lfloor \frac{n+6}{4} \rfloor = \lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ illetve $\lfloor \frac{n+4}{4} \rfloor = \lceil \frac{n}{4} \rceil$, kizárólag konkáv csúcsba, következésképpen P bizonyos csúcsaiba állított őrrel, attól függően, hogy $n = 4k$ vagy $n = 4k + 2$.

Ezekután tekintsük a P-t tartalmazó legkisebb Q' téglalapot. Mivel $Q \setminus Q'$ is védve van, leszámítva esetleg a besatírozott kis téglalapot az $n = 4k+2$ esetben, Q' minden oldalán kell állni legalább egy őrnek. Ez az említett kivételes esetben is igaz lesz, ha elhelyezünk egy új őrt e valamelyik végpontjában. A Q' oldalain álló őrök nyilván védik Q' külsejét, így a kapott $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ őr mindkét esetben védi a P sokszög külsejét is. $\square$

Áttérünk a terület egyik legizgalmasabb nyitott problémájának, az ortogonális börtönudvar problémának az ismertetetésére. Megjegyezzük, hogy már az általános sokszögekre vonatkozó börtönudvar problémát is csak nagy nehézségek árán sikerült megoldani, Füredi Zoltán és D.J. Kleitman [4] igazolta, hogy egy n oldalú sokszög belsejének és külsejének védelméhez $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ őr mindig elég, és alkalmanként szükséges is. Az ortogonális változat pedig még nehezebbnek tűnik. Az alábbi felső becslés közismert.

3.2. Tétel (O'Rourke, 1987). *Bármely n oldalú ortogonális sokszög belsejének és külsejének védelméhez $\lceil \frac{7n}{16} \rceil + 5$ őr mindig elég.*

Bizonyítás. A 3.1. Tétel szerint a sokszög külseje védhető $\lceil \frac{n}{4} \rceil + 1$ őrrel. Most bontsuk konvex négyszögekre a sokszöget (vö. 2.3. Tétel), és töröljük azokat az éleket melyek valamely végpontjában őr áll. A kapott gráf már nem biztos, hogy összefüggő, mindenesetre csúcsainak száma legfeljebb $n - \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1$. Ezután töröljük azokat a csúcsokat és éleket is, amelyek nem tartoznak egyik négyszöghöz sem, és színezzük ki négy színnel a komponensek csúcsait úgy, mint azt a

2.4. Tétel bizonyításában tettük. Végül állítsunk őröket azokba a csúcsokba, amelyek színe a 4-színezésben a legkevesebb alkalommal fordul elő. Így egy m csúcsú komponenshez legfeljebb $\lfloor \frac{m}{4} \rfloor$ őrt választunk. Következésképpen a felhasznált őrök száma, melyek nyilván védik a sokszög külsejét és belsejét is, nem nagyobb, mint

$$\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 + \left\lfloor \frac{n - \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1}{4} \right\rfloor \leqslant \left\lceil \frac{7n}{16} \right\rceil + 5. \qquad \square$$

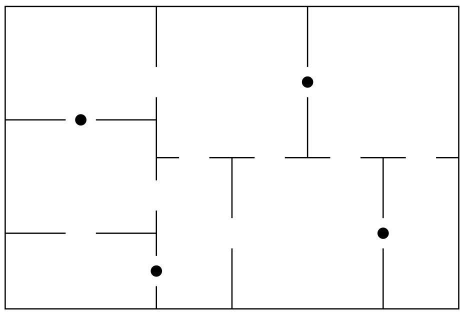
Ezt a korlátot F. Hoffmann és K. Kriegel nemrégiben kicsit megjavították.

3.3. Tétel (Hoffmann - Kriegel, 1996). *Bármely n oldalú ortogonális sokszög belsejének és külsejének védelméhez $\lfloor \frac{5n}{12} \rfloor + 2$ őr mindig elég.*

Azonban meg kell jegyeznünk, hogy nem ismerünk olyan ortogonális sokszögeket, melyek külsejének és belsejének védelméhez $\lceil \frac{5n-10}{16} \rceil$ őr nem elég.

4. Téglalap alaprajzú képtárak

Tekintsünk egy olyan téglalap alaprajzú képtárat, amely (hézagmentesen) fel van osztva n téglalap alakú teremre. Tegyük fel, hogy bármely két szomszédos termet ajtó köt össze (két terem akkor szomszédos, ha van közös faluk). Határozzuk meg, hogy hány teremőr szükséges egy ilyen típusú képtár védelméhez (ld. 4.1. ábra). Világos, hogy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ őr mindig szükséges. Célunk annak megmutatása, hogy ennyi elég is.



4.1. ábra

4.1. Tétel (Czyzowicz et al., 1992). *Bármely olyan téglalap alakú képtár védelméhez, amelyben n téglalap alakú terem van $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ őr mindig elég.*

Bizonyítás. A bizonyításban alapvető szerepet játszik egy gráfelméleti tétel. Egy G gráf valamely M élhalmazát párosításnak nevezzük, ha M bármely két élének különbözőek a végpontjai. Egy M párosításról azt is mondhatjuk, hogy lefedi az éleinek végpontjait. Egy M párosítást teljesnek nevezünk, ha G minden csúcsát lefedi M.

4.2. Tétel (Tutte, 1947). *Egy G gráfban akkor és csak akkor létezik teljes párosítás, ha minden $X \subseteq V(G)$ esetén $c_p(G-X) \leqslant |X|$, ahol $c_p(G-X)$ jelöli a $V(G) \setminus X$ csúcsok által kifeszített részgráf páratlan számú csúcsot tartalmazó komponenseinek számát.*

Bizonyítás. Ha G-ben van egy M teljes párosítás, akkor a feltétel nyilván teljesül. Valóban, legyen $X \subseteq V(G)$ és jelölje $G_1, \ldots, G_k$ a $G-X$ gráf páratlan csúcsú komponenseit. Most a G_i részgráfok mindegyikéből kiindul legalább egy olyan M-beli él, amelynek másik végpontja X-ben van. Ám ezek az élek szükségképpen különböző X-beli csúcsokban végződnek, így $c_p(G-X) \leqslant |X|$ fennáll.

A feltétel elégségességének bizonyítása sokkal bonyolultabb. Mindenekelőtt szükségünk lesz a következő észrevételre.

4.3. Állítás. *Legyen G olyan gráf, amelyben nincs teljes párosítás, ám bármely két nem szomszédos csúcsát összekötve már tartalmaz teljes párosítást. Ekkor G tartalmaz néhány olyan csúcsot, jelölje ezek halmazát V_1, amelyek minden G-beli csúccsal össze vannak kötve, a $V(G) \setminus V_1$ csúcshalmaz pedig páronként diszjunkt teljes gráfokat feszít ki.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ha $a, b, c \in V(G) \setminus V_1$ és $(a,b), (b,c) \in E(G)$, akkor $(a,c) \in E(G)$ is teljesül. Ebből következik, hogy a "két csúcsot él köt össze" ekvivalencia reláció a $V(G) \setminus V_1$ halmazon, amely páronként diszjunkt teljes gráfokra bontja a $G - V_1$ gráfot.

Indirekt tegyük fel, hogy $(a,c) \notin E(G)$. Mivel $b \notin V_1$, ezért létezik olyan a-tól és c-től különböző d csúcs, amely nincs összekötve b-vel. A G-re vonatkozó maximalitási feltétel miatt most $G \cup (a,c)$ és $G \cup (b,d)$ is tartalmaz teljes párosítást, jelölje ezeket M_1 és M_2. Nyilván $(a,c) \in M_1$ és $(b,d) \in M_2$, továbbá $(a,c) \notin M_2$ és $(b,d) \notin M_1$. Most tekintsük az $M_1 \cup M_2$ élhalmazt. Világos, hogy ez a halmaz diszjunkt alternáló körökből (azaz olyan körökből, amelyekben felváltva M_1 és M_2 élei következnek), valamint M_1 és M_2 közös éleiből áll. Legyen (a,c) egy C_1 alternáló körön, (b,d) pedig egy C_2 alternáló körön.

1. ESET: Ha $C_1 \neq C_2$, akkor M_1-ben az $E(C_1) \cap M_1$ éleket az $E(C_1) \cap M_2$ élekre cserélve G egy teljes párosítását kapjuk, ellentmondás.
2. ESET: Ha $C_1 = C_2$, akkor az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy b, d, a, c az óramutató járása szerint ebben a sorrendben követik egymást C_1-en. Így létezik olyan P út b-ből a-ba, amely M_2-beli éllel kezdődik és végződik, hiszen $(b, d) \in M_2$ és $(a, c) \in M_1$. Most kicserélve M_2-ben az $E(P \cup (a, b)) \cap M_2$ éleket az $E(P \cup (a, b)) \setminus M_2$ élekre ismét G egy teljes párosítását kapjuk, ami megint ellentmondás. $\square$

Ezekután térjünk vissza Tutte tételének bizonyításához. Nyilván elég megmutatni, hogy ha G-ben nincs teljes párosítás, akkor létezik olyan $X \subseteq V(G)$ amelyre $c_p(G - X) > |X|$.

Ha $|V(G)|$ páratlan, akkor $X = \emptyset$ rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, ezért tegyük fel, hogy $|V(G)|$ páros. Tekintsünk egy a tartalmazásra nézve maximális olyan G' gráfot $V(G)$-n, amelyre $E(G) \subseteq E(G')$ és G'-ben sincs teljes párosítás. Mivel G' bármely két nem szomszédos csúcsát összekötve már tartalmaz teljes párosítást, ezért az előző állítás szerint G' tartalmaz néhány olyan csúcsot, jelölje ezek halmazát V_1, amelyek minden G'-beli csúccsal össze vannak kötve, a $V(G') \setminus V_1$ csúcshalmaz pedig páronként diszjunkt teljes gráfokat feszít ki. Jelölje ezeket a teljes gráfokat $G_1, \ldots, G_k$.

Állítjuk, hogy a $G_1, \ldots, G_k$ gráfok közül legalább $|V_1| + 1$ páratlan számú csúcsot tartalmaz. Indirekt tegyük fel, hogy ez nincs így, és válasszunk a páros csúcsszámú G_i gráfokban teljes párosítást, a páratlan csúcsszámú G_i gráfokban pedig maximális párosítást, azaz olyan párosítást, amely pontosan egy csúcsot nem fed le. Mivel $k \leqslant |V_1|$, ezért választhatunk olyan független éleket, amelyek a fenti lefedetlen csúcsokat V_1-beli csúcsokkal párosítják. Most felhasználva a $|V(G)|$ párosságára vonatkozó feltevésünket, kapjuk, hogy páros sok V_1-beli csúcs maradhatott eddig fedetlen. Viszont ezeket tetszés szerint párosíthatjuk, hiszen V_1 teljes gráfot feszít ki G'-ben. Így G' egy teljes párosításához jutottunk, ellentmondás.

Ennélfogva létezik legalább $|V_1| + 1$ páratlan csúcsot tartalmazó komponens a $G' - V_1$ gráfban. Ha sorban eltávolítjuk az $E(G') \setminus E(G)$ éleket, akkor ezek a páratlan komponensek több részre eshetnek szét, ám vegyük észre, hogy a komponensek mindegyikéből legalább egy rész páratlan marad. Következésképpen $c_p(G - V_1) > |V_1|$ továbbra is fennáll. $\square$

Végül lássuk a 4.1. Tétel bizonyítását. Rendeljünk hozzá a T képtárhoz egy G gráfot a következőképpen. G csúcsai feleljenek meg a képtár termeinek, és két csúcsot pontosan akkor kössünk össze, ha a megfelelő termek közt van ajtó.

Először azzal az esettel foglalkozunk, amikor G szögpontjainak száma páros. Legyen $S \subseteq V(G)$ és jelölje k a $V(G) \setminus S$ által kifeszített részgráf összefüggő komponenseinek számát. Nyilván minden C_i komponensnek megfelel egy P_i ortogonális sokszög, amely része T-nek. Mivel minden P_i ortogonális sokszögnek legalább négy csúcsa van, ezért a k darab $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ortogonális sokszögnek összesen legalább $4k$ csúcsa van. Ha most egymás után visszahelyezzük az S-nek megfelelő téglalapokat, akkor minden lépésben a csúcsok száma legfeljebb néggyel csökken, míg végül T négy csúcsa marad csak. Ennélfogva $k \leqslant |S| + 1$. Ha $k = |S| + 1$, akkor a $V(G) \setminus S$ által kifeszített részgráf legalább egy komponense páros számú csúcsot tartalmaz, ellenkező esetben $|V(G)|$ páratlan lenne. Így Tutte tételének feltételei teljesülnek, következésképpen G-ben létezik teljes párosítás. A teljes párosítás $\frac{n}{2}$ élének megfelelő ajtókban elhelyezett őrök pedig nyilván védelmezik T-t.

Hátra van még az az eset, amikor $|V(G)|$ páratlan. Ekkor csatoljunk egy fiktív téglalapot teljes szélességében T valamelyik oldalához és alkalmazzuk az előző okoskodást. $\square$

Hivatkozások

[1] Aggarwal, A.: *The art gallery theorem: its variations, applications, and algorithmic aspects*, Ph.D. Thesis, Johns Hopkins University, 1984.

[2] Chvátal, V.: A combinatorial theorem in plane geometry, *J. Combinatorial Theory* **B18** (1975), 39-41.

[3] Czyzowicz, J., Rivera-Campo, E., Santoro, N., Urrutia, J., Zaks, J.: Guarding rectangular art galleries, *Discrete Applied Mathematics* **50** (1994), 149-157.

[4] Füredi, Z., Kleitman, D.J.: The prison yard problem, *Combinatorica* **14** (1994), 287-300.

[5] Győri, E.: A short proof of the rectilinear art gallery theorem, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **7** (1986), 452-454.

[6] Győri, E.: Partitions and covers of rectilinear regions, in: *Extremal problems for finite sets, (Visegrád, 1991)*, Bolyai Society Mathematical Studies **3**, 1994, pp. 289-304.

[7] Hoffmann, F.: On the rectilinear art gallery problem (extended abstract), in: *Proc. ICALP '90*, Lecture Notes in Computer Science **443**, 1990, pp. 717-728.

[8] Hoffmann, F., Kriegel, K.: A graph-coloring result and its consequences for polygon-guarding problems, *SIAM J. Discrete Mathematics* **9** (1996), 210-224.

[9] Kahn, J., Klawe, M., Kleitman, D.J.: Traditional galleries require fewer watchmen, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **4** (1983), 194-206.

[10] Lubiw, A.: Decomposing polygonal regions into convex quadrilaterals, in: *Proc. 1st ACM Symp. Comp. Geom.*, 1985, pp. 97-106.

[11] O'Rourke, J.: An alternate proof of the rectilinear art gallery theorem, *J. Geometry* **21** (1983), 118-130.

[12] O'Rourke, J.: *Art gallery theorems and algorithms*, Oxford University Press, 1987.

[13] Szabó, L.: Klasszikus képtár problémák, *Polygon* **III/2** (1993), 37-64.

[14] Tutte, W.T.: The factorization of linear graphs, *J. London Math. Soc.* **22** (1947), 107-111.