Klasszikus képtár problémák

Szabó László
Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Geometriai Tanszék,
1088 Budapest,
Rákóczi út 5.

2000. július 17.

1. Bevezetés

A következő problémát Victor Klee tűzte ki 1973-ban. Egy képzőművészeti kiállításon értékes festményeket mutatnak be. Határozzuk meg, hogy a falak számának függvényében hány teremőr szükséges a képek védelméhez. A kérdést Vasek Chvátal [1975] hamarosan megválaszolta; egy n oldalú sokszög alaprajzú képtárhoz $\lfloor n/3 \rfloor$ őr mindig elég és alkalmanként szükséges is. Ez a szép, és mint látni fogjuk teljesen elemi tétel problémák egész sorát indította el, melyek egy része máig is nyitott.

2. Sokszögek felbontása

Mindenekelőtt idézzünk fel néhány egyszerű fogalmat. A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontokból képzett $\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \ldots, \overline{v_nv_1}$ szakaszok összességét sokszögvonalnak nevezzük. A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok a sokszögvonal csúcsai, a $\overline{v_1v_2}, \overline{v_2v_3}, \ldots, \overline{v_nv_1}$ szakaszok pedig a sokszögvonal oldalai. Azokat a sokszögvonalakat, melyeknél a sokszögvonalat alkotó szakaszoknak az előírt csatlakozási pontokon kívül további közös pontjuk nincs egyszerű sokszögvonalnak nevezzük. Ha két csatlakozó szakasz egyenesszöget alkot, akkor azokat általában egyetlen oldalnak tekintjük, és csatlakozási pontjukat nem számítjuk a sokszögvonal csúcsai közé.

Egy egyszerű sokszögvonal a síkot két tartományra bontja, egy belsőre és egy külsőre. Technikai okokból magát a sokszögvonalat mindkét részhez hozzászámítjuk. A sokszögvonal belsejét röviden sokszögnek is nevezzük. A sokszög két nem szomszédos oldalát összekötő olyan szakasz, melynek végpontjain kívül a sokszög(vonal) külsejével nincs közös pontja, a sokszög egy átlója. A következő állítás alapvető fontosságú a képtár problémák vizsgálatában.

2.1. Állítás. *Minden n oldalú sokszög $n-3$ egymást nem metsző átlóval $n-2$ háromszögre bontható.*

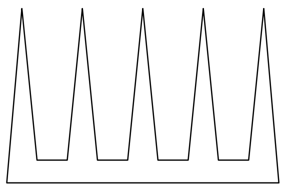
Bizonyítás. Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 3$, akkor a sokszög háromszög, és akkor persze nincs mit bizonyítanunk. Ezért legyen $n \geq 4$.

Először azt mutatjuk meg, hogy a sokszögnek létezik legalább egy átlója. Tekintsük a sokszög konvex burkának valamelyik v csúcsát. Ez a csúcs nyilván csúcsa, mégpedig konvex csúcsa az eredeti sokszögnek is. Jelölje u és w a sokszög v-vel szomszédos két csúcsát. Ha $\overline{uw}$ a sokszög egy átlója, akkor kész vagyunk. Ha ez nem áll fenn, akkor viszont a sokszög bizonyos csúcsainak az uvw háromszög belsejében, illetve az u és w végpontú nyílt szakaszon kell lenniük. Jelöljön ezen csúcsok közül z egy olyant, amelynek az uw egyenestől mért távolsága maximális. Világos, hogy ekkor $\overline{vz}$ a sokszög egy átlója.

Ezek után a bizonyítás már egyszerű. Tekintsük a sokszög egy átlóját. Ez az átló a sokszöget két, mondjuk n_1 és n_2 oldalú sokszögre bontja, ahol $n_1 + n_2 = n + 2$. Mivel n_1 és n_2 is kisebb, mint n, ezért az indukciós feltevés szerint a két részsokszög egymást nem metsző átlókkal $n_1 - 2$ illetve $n_2 - 2$ háromszögre bontható. Egyesítve a két, háromszögekre bontott részsokszöget, az eredeti sokszög egy $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) = n - 2$ háromszögből álló felbontását kapjuk. □

Ezek után legyen P tetszőleges sokszög, és tegyük fel, hogy P-t valamilyen módon háromszögekre bontottuk (egyébként ennek gyors megvalósítása, például lineáris időben, nem is olyan egyszerű probléma, mint első látásra tűnik (vö. Chazelle [1991])). Tekintsük azt a gráfot, melynek szögpontjai a sokszög csúcsai, élei pedig a háromszögfelbontásban szereplő oldalak és átlók. Ezt a síkgráfot a háromszögfelbontás gráfjának nevezzük. Alkalmanként több információ nyerhető ennek a gráfnak a duális gráfjából, melynek szögpontjai a felbontásban szereplő háromszögeknek, élei pedig a közös oldallal rendelkező háromszögpároknak felelnek meg. Világos, hogy egy P sokszög bármely háromszögfelbontásának duális gráfja olyan fa, melynek csúcsai legfeljebb harmadfokúak. Ha egy háromszögfelbontás valamely háromszögének csúcsai a sokszög határán egymás után következnek, akkor ezt a háromszöget a felbontás egy szélső háromszögének nevezzük. Mivel minden fának van legalább két elsőfokú csúcsa, ezért minden háromszögfelbontás tartalmaz legalább két szélső háromszöget. Ennek az egyszerű tulajdonságnak a felhasználásával, az oldalak száma szerinti teljes indukcióval egyszerűen igazolható például, hogy bármely háromszögfelbontás csúcsait ki lehet színezni három színnel úgy, hogy a felbontásban szereplő háromszögek csúcsai mind különböző színűek legyenek.

A Klee által kitűzött képtár probléma megoldásához szükségünk van még egy definícióra. Legyen P tetszőleges sokszög, és tüntessük ki P bizonyos pontjait, melyeket a továbbiakban teremőröknek fogunk tekinteni. Azt mondjuk, hogy egy q teremőr látja a P sokszög valamely p pontját, ha a $\overline{pq}$ szakasz teljes egészében P belsejében helyezkedik el. Továbbá teremőrök egy $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ csoportjáról azt mondjuk, hogy védelmezi a P sokszöget, ha minden $p \in P$ ponthoz létezik olyan $q_i \in Q$ teremőr, amelyik látja p-t. A probléma ezek után az őrök minimális számának meghatározása tetszőleges sokszög esetén. A 2.1. ábrán látható n-szög mutatja, hogy ez a minimum legalább $\lfloor n/3 \rfloor$ minden n-re.



2.1. ábra

Megmutatjuk, hogy ennél több őrre soha nincs szükség. Először lássuk Chvátal eredeti, kicsit bonyolult, de mindenképpen tanulságos, induktív bizonyítását.

2.2. Tétel. *Egy n oldalú sokszög védelméhez $\lfloor n/3 \rfloor$, kizárólag csúcsokba állított őr mindig elég.*

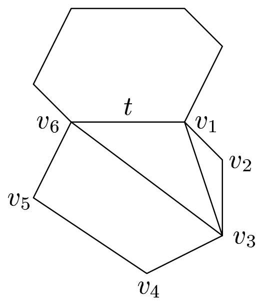
Bizonyítás. Egymást nem metsző átlók behúzásával bontsuk fel a sokszöget háromszögekre. Jelölje G a háromszögfelbontás gráfját. Nyilván elég megmutatni, hogy G szögpontjainak létezik olyan, legfeljebb $\lfloor n/3 \rfloor$ elemű részhalmaza, amely letűzi G lapjait, azaz G minden lapjának legalább egyik csúcsát tartalmazza. Ezt a szögpontok n száma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n \leqslant 5$, akkor az állítás magától értetődik. Ezért legyen $n > 5$, és tegyük fel, hogy minden n-nél kevesebb szögpontú háromszögfelbontásra (pontosabban annak gráfjára) igaz az állítás.

Tekintsünk egy olyan G háromszögfelbontást, amelynek n szögpontja van. Először megmutatjuk, hogy G-nek van olyan t átlója, amely G-ből 4, 5 vagy 6 oldalt vág le. Legyen t egy olyan átló amely minimális számú, de legalább 4 oldalt vág le G-ből. Tegyük fel, hogy ezeknek az oldalaknak a száma k.

Jelölje G szögpontjait az óramutató járása szerint $v_1, v_2, \ldots, v_n$ úgy, hogy $t = \overline{v_1 v_{k+1}}$. A t átlóra illeszkedő háromszögek valamelyikének v_s harmadik csúcsára nyilván $2 \leqslant s \leqslant k$. Ám a t átló megválasztása miatt $s \leqslant 4$ és $k+1-s \leqslant 3$, ahonnan $k \leqslant 6$. Jelölje G_1 és G_2 azokat a $k+1$, illetve $n-k+1$ szögpontú háromszögfelbontásokat, amelyekre a t átló G-t bontja.

1. ESET: $k = 4$. Az indukciós feltevés szerint ekkor G_1 lapjai egy szögponttal, G_2 lapjai pedig $\lfloor (n-3)/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor - 1$ szögponttal letűzhetők.

2. ESET: $k = 5$. Tekintsük G_1-ben a t átlóra támaszkodó $v_1 v_s v_6$ háromszöget. A t átló megválasztása miatt ekkor $s = 3$ vagy $s = 4$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $s = 3$ (ld. 2.2. ábra).



2.2. ábra

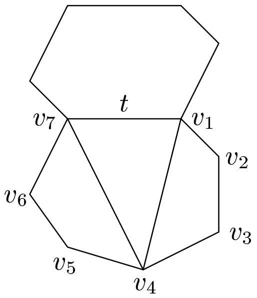
2.1. ESET: $\overline{v_3 v_5}$ hozzátartozik G_1-hez. Az indukciós feltevés szerint ekkor G_2 lapjai $\lfloor (n-4)/3 \rfloor \leq \lfloor n/3 \rfloor - 1$ szögponttal letűzhetők, G_1-et pedig nyilván letűzi v_3.

2.2. ESET: $\overline{v_4 v_6}$ tartozik hozzá G_1-hez. Legyen $G_0 = G_2 \cup v_1 v_3 v_6$. Ekkor az indukciós feltevés szerint G_0 lapjai $\lfloor (n-3)/3 \rfloor = \lfloor n/3 \rfloor - 1$ szögponttal letűzhetők.

2.2.1. ESET: v_1 vagy v_3 tűzi le a $v_1 v_3 v_6$ háromszöget. Ekkor a G_0-t letűző szögponthalmaz a v_4 szögponttal kiegészítve letűzi G-t.

2.2.2. ESET: v_6 tűzi le a $v_1 v_3 v_6$ háromszöget. Ekkor pedig a G_0-t letűző szögponthalmaz a v_2 szögponttal kiegészítve tűzi le G-t.

3. ESET: $k = 6$. Tekintsük G_1-ben a t átlóra támaszkodó $v_1 v_s v_7$ háromszöget. A t átló megválasztása miatt ekkor $s = 4$ (ld. 2.3. ábra).



2.3. ábra

3.1. ESET: $\overline{v_2v_4}$ és $\overline{v_4v_6}$ hozzátartozik G_1-hez. Az indukciós feltevés szerint ekkor G_2 lapjai $\lfloor(n-5)/3\rfloor \leq \lfloor n/3\rfloor - 1$ szögponttal letűzhetők, G_1-et pedig nyilván letűzi v_4.

3.2. ESET: $\overline{v_1v_3}$ és $\overline{v_4v_6}$ hozzátartozik G_1-hez. Legyen $G_0 = G_2 \cup v_1v_3v_4 \cup v_1v_4v_7$. Ekkor az indukciós feltevés szerint G_0 lapjai $\lfloor(n-3)/3\rfloor = \lfloor n/3\rfloor - 1$ szögponttal letűzhetők.

3.2.1. ESET: v_1 vagy v_3 tűzi le a $v_1v_3v_4$ háromszöget. Ekkor a G_0-t letűző szögponthalmaz a v_4 szögponttal kiegészítve letűzi G-t.

3.2.2. ESET: v_4 tűzi le a $v_1v_3v_4$ háromszöget. Ekkor pedig a G_0-t letűző szögponthalmaz a v_2 szögponttal kiegészítve tűzi le G-t.

3.3. ESET: $\overline{v_2v_4}$ és $\overline{v_5v_7}$ hozzátartozik G_1-hez. Ez ugyanaz mint a 3.2. eset.

3.4. ESET: $\overline{v_1v_3}$ és $\overline{v_5v_7}$ hozzátartozik G_1-hez. Legyen $G_0 = G_2 \cup v_1v_4v_7$. Ekkor az indukciós feltevés szerint G_0 lapjai $\lfloor(n-4)/3\rfloor \leq \lfloor n/3\rfloor - 1$ szögponttal letűzhetők.

3.4.1. ESET: v_1 vagy v_7 tűzi le a $v_1v_4v_7$ háromszöget. Ekkor a G_0-t letűző szögponthalmaz a v_7, illetve a v_1 szögponttal kiegészítve letűzi G-t.

3.4.2. ESET: v_4 tűzi le a $v_1v_4v_7$ háromszöget. Most a G_0-t letűző szögponthalmaz a v_7 és v_1 szögpontokkal kiegészítve v_4 nélkül is letűzi G-t.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

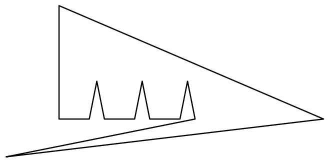
Chvátal bizonyításának megjelenése után három évvel Fisk egy bámulatosan egyszerű bizonyítást publikált. A bizonyítás a következő. Bontsuk fel a sokszöget háromszögekre, és színezzük ki a csúcsokat három színnel úgy, hogy a felbontásban szereplő háromszögek csúcsai mind különböző színűek legyenek. Vizsgáljuk meg melyik színt használtuk fel a legkevesebb alkalommal, és az ezzel a színnel megjelölt csúcsokba állítsuk őreinket. Világos, hogy ekkor az őrök száma legfeljebb $\lfloor n/3\rfloor$.

3. Erődítmény probléma

Wood és Malkelvitch egymástól függetlenül a képtár probléma egy érdekes változatát vetették fel, melyet Wood után erődítmény problémának nevezünk. Ebben azt vizsgáljuk, hogy hány őr szükséges egy sokszög alaprajzú erődítmény külsejének védelméhez. Az előzőekhez teljesen hasonlóan tüntessük ki egy P sokszög(vonal) külsejének bizonyos pontjait, melyeket őröknek fogunk tekinteni. Azt mondjuk, hogy egy q őr látja a P külsejének valamely p pontját, ha a $\overline{pq}$ szakasz teljes egészében P külsejében van. Továbbá őrök egy $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ csoportjáról azt mondjuk, hogy védelmezi a P sokszög külsejét, ha P minden p külső pontjához létezik olyan $q_i \in Q$ őr, amelyik látja p-t. A problémát Aggarwal [1984] oldotta meg (rendkívül bonyolult módon); egy n oldalú sokszög alaprajzú erődítmény külsejének védelméhez $\lceil n/3 \rceil$ őr mindig elég és alkalmanként szükséges is. Két évvel később Shermer talált egy nagyon egyszerű bizonyítást erre a tételre. Lássuk ezt a bizonyítást.

3.1. Tétel. *Egy $n \geq 4$ oldalú sokszög külsejének védelméhez $\lceil n/3 \rceil$ őr mindig elég és alkalmanként szükséges is.*

Bizonyítás. A szükségességet a 3.1. ábrán látható sokszög mutatja.



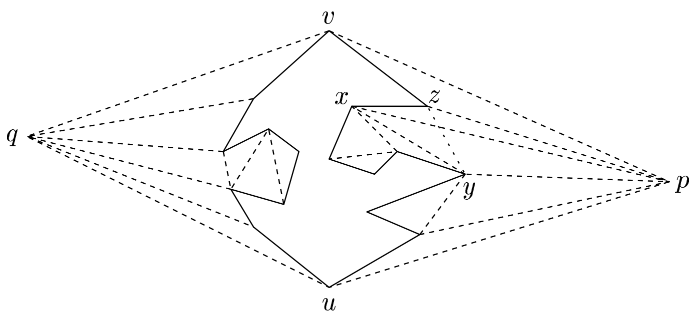
3.1. ábra

Ha a sokszög konvex, akkor külsejének védelméhez 2 őr nyilván elég. Most tekintsünk egy n oldalú P sokszöget, amely nem konvex. Forgassuk el P-t úgy, hogy P konvex burkának legalacsonyabban fekvő u, illetve legmagasabban fekvő v csúcsa egyértelmű legyen. Most bontsuk háromszögekre P konvex burkának azon részeit, amelyek nem tartoznak P-hez. Ezután jelöljünk ki az uv egyenes különböző partjain két, az u és v csúcsokat is látó p és q pontot, majd kössük össze azokat a konvex burok feléjük néző csúcsaival. Az így kapott síkgráfot jelölje G. Jelölje továbbá P konvex burkának csúcsszámát h.

1. ESET: h páros. Színezzik ki P konvex burkának csúcsait felváltva pirosra és kékre, p és q színe pedig legyen sárga. Világos, hogy ez a színezés kiterjeszthető G egy 3-színezésévé, hiszen a konvex burokban lévő részek nyilván 3-színezhetők.

A legkevesebbszer használt szín ekkor legfeljebb $\lfloor (n+2)/3 \rfloor \leq \lceil n/3 \rceil$ alkalommal fordul elő, és könnyű ellenőrizni, hogy az ezzel a színnel megjelölt csúcsok védik is P külsejét.

2. ESET: h páratlan. Tekintsük P konvex burkának egy olyan $\overline{yz}$ oldalát, amely eredetileg nem oldala a P sokszögnek, és legyen az erre támaszkadó háromszögnek a konvex burokban lévő harmadik csúcsa x. Világos, hogy esetleg P-t alkalmasan elforgatva, a p és q pontokat úgy is elhelyezhetjük, hogy azok látják P konvex burkának legalacsonyabban és legmagasabban fekvő csúcsait, és mondjuk p látja az x pontot is. Most töröljük G-ből az $\overline{yz}$ élt, és húzzuk be helyette az $\overline{xp}$ élt (ld. 3.2. ábra).



3.2. ábra

Mivel most már a „konvex burok" csúcsainak száma páros, alkalmazhatjuk az előző gondolatmenetet azzal az apró megjegyzéssel, hogy ha az $\overline{yz}$ él egyik végpontjában sincs őr, akkor az x csúcsban mindenképpen van, így a „konvex burok" külseje ebben az esetben is mindenképpen védve van. □

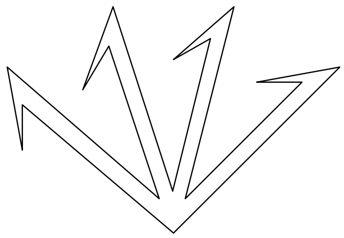
Mégegy fontos tételt említünk, amelyet Füredi és Kleitman [1994] bizonyított. A bizonyítás meglehetősen technikás, ezért azzal itt nem foglalkozunk.

3.2. Tétel. *Egy n oldalú sokszög belsejének és külsejének védelméhez $\lfloor n/2 \rfloor$, kizárólag csúcsokba állított őr mindig elég és alkalmanként szükséges is.*

4. Sétáló teremőrök

Valószínűleg Toussaint kezdeményezte olyan problémák vizsgálatát, melyekben az őrök nincsenek helyhez kötve, hanem például egy egyenes szakasz mentén sétálgathatnak. Ilyen esetekben, az egyszerűbb fogalmazás kedvéért, egy P sokszög belsejének [külsejének] bizonyos részhalmazait tekintjük őröknek. Azt mondjuk, hogy egy Q őr látja a P belsejének [külsejének] valamely p pontját, ha létezik olyan $q \in Q$ pont, amelyre a $\overline{pq}$ szakasz teljes egészében P belsejében [külsejében] fekszik. Továbbá őrök egy $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}$ csoportjáról azt mondjuk, hogy védelmezi a P sokszög belsejét [külsejét], ha P minden p belső [külső] pontjához létezik olyan $Q_i \in \mathcal{Q}$ őr, amelyik látja p-t.

Meg fogjuk mutatni, hogy egy n oldalú sokszög belsejének, illetve külsejének védelméhez $\lfloor n/4 \rfloor$, illetve $\lceil n/4 \rceil$ sétáló őr mindig elég. A szükségességet $n = 4r$ esetén a 4.1. ábrán látható sokszög mutatja. Valóban, semelyik két kampó nem védhető ugyanazzal a sétáló őrrel. Konstrukciónk egyszerű módosításával a sokszög belsejének őrzéséhez minden n-re adható olyan példa, amelyben $\lfloor n/4 \rfloor$ őr szükséges, ám a sokszög külsejének védelménél $n \neq 4r$ esetén csak $n = 4r + 3$ csúcsszámra ismerünk $\lceil n/4 \rceil$ őrt megkívánó sokszögeket. Az $n = 4r + 1$ és $n = 4r + 2$ esetekben nem tudjuk, hogy az $\lceil n/4 \rceil$ korlát éles (itt csak olyan konstrukcióink vannak, ahol $\lceil n/4 \rceil - 1$ őr szükséges).



4.1. ábra

Egy konvex sokszög belsejének sétáló őrökkel való védelmét először O'Rourke [1983] vizsgálta. Sajnos a már említett felső korlát bizonyítása hiányos, sőt hibákat is tartalmaz (ráadásul O'Rourke [1987] monográfiájában is szerepel ugyanez a bizonyítás). Lássunk egy hibátlan bizonyítást.

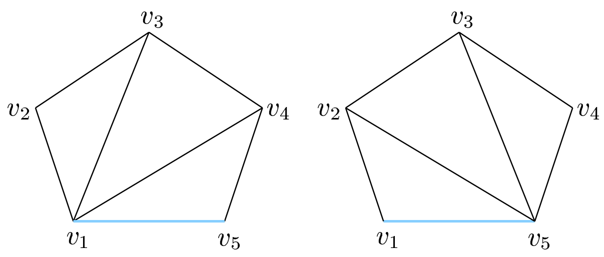
4.1. Állítás. *Jelölje $f(n)$ azt a legkisebb egész számot, amelyre tetszőleges n szögpontú háromszögfelbontás letűzhető $f(n)$ éllel. Ekkor minden n szögpontú háromszögfelbontás letűzhető $f(n-1)$ éllel és egy olyan csúccsal, amely a felbontás egy előre adott oldalának (a határon levő élének) valamelyik végpontjában van.*

Bizonyítás. Legyen G egy n szögpontú háromszögfelbontás gráfja, $e = (u, v)$ pedig a G egy előre rögzített oldala. Helyettesítsük az e élt egy olyan x új szögponttal, amely pontosan az eredetileg u-val vagy v-vel szomszédos szögpontokkal van összekötve. Az így kialakult G' gráf (amelynek természetesen a háromszögfelbontás reprezentációját tekintjük) lapjai nyilván letűzhetők $f(n-1)$ éllel. Ha x nem végpontja egyetlen, a letűzésben szereplő élnek sem, akkor ugyanez az élhalmaz letűzi G lapjait is, eltekintve esetleg az e-re támaszkodó háromszögről, amely viszont letűzhető például az u szögponttal. Ezért tegyük fel, hogy x hozzátartozik valamelyik, a letűzésben szereplő élhez. Minden ilyen (x, y) élt cseréljünk ki (u, y)-ra, illetve (v, y)-ra attól függően, hogy eredetileg melyik él tartozott G-hez (ha mindkettő, akkor választásunk tetszőleges). Ha most az u vagy a v szögpont nem végpontja a kapott élhalmaz egyetlen tagjának sem, akkor azt válasszuk még letűző csúcsnak. Világos, hogy a kialakult rendszer ekkor is letűzi G minden lapját. □

A bizonyítás hátralevő része egy bonyolult esetdiszkusszió, amely logikai felépítését tekintve nagyon hasonló az eredeti képtárprobléma Chvátal-féle megoldásához.

4.2. Állítás. *Minden öt csúcsú háromszögfelbontás letűzhető egyetlen éllel, melynek egyik végpontjának helye ráadásul előre megadható.*

Bizonyítás. Jelölje $v_1, v_2, \ldots, v_5$ a felbontás szögpontjait az óramutató járása szerint. Világos, hogy ha rögzítjük valamelyik csúcsot, például v_1-et, akkor három lényegesen különböző háromszögfelbontás létezik.



4.2. ábra

A 4.2. ábra mutatja a lehetséges eseteket, és a hozzájuk tartozó letűző éleket. □

4.3. Állítás. *Minden hét csúcsú háromszögfelbontás letűzhető egyetlen éllel.*

Bizonyítás. Jelölje $v_1, v_2, \ldots, v_7$ a felbontás szögpontjait az óramutató járása szerint, és tekintsük a felbontás egy t átlóját (belső élét). Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $t = \overline{v_1 v_3}$ vagy $t = \overline{v_1 v_4}$.

1. ESET: $t = \overline{v_1v_3}$. Ekkor t-re még egy háromszög támaszkodik a $v_1v_3v_4$, $v_1v_3v_5$, $v_1v_3v_6$, $v_1v_3v_7$ háromszögek közül (a többi három természetesen nem tartozik a felbontáshoz). Most is csak két lényegesen különböző eset van.

1.1. ESET: $v_1v_3v_4$ támaszkodik t-re. A 4.2. Állítás szerint a $v_1v_4v_5v_6v_7$ ötszög letűzhető egyetlen olyan éllel, melynek valamelyik végpontja v_1. Világos, hogy ez az él letűzi az egész felbontást is.

1.2. ESET: $v_1v_3v_5$ támaszkodik t-re. Ekkor pedig a $\overline{v_1v_5}$ él tűzi le a hétszöget, függetlenül a $v_1v_5v_6v_7$ négyszög felbontásától.

2. ESET: $t = \overline{v_1v_4}$. Ismét a 4.2. Állítás szerint a $v_1v_4v_5v_6v_7$ ötszög letűzhető egyetlen éllel. Ráadásul a $v_1v_2v_3v_4$ négyszög felbontásától függően, ennek az élnek az egyik végpontját v_1-ben illetve v_4-ben rögzíthetjük, és így egy az egész felbontást letűző élhez juthatunk. □

4.4. Állítás. *Minden kilenc csúcsú háromszögfelbontás letűzhető két éllel, melyek egyikének valamely végpontja előre megadható.*

Bizonyítás. Jelölje $v_1, v_2, \dots, v_9$ a felbontás szögpontjait az óramutató járása szerint, és tüntessük ki ezek közül például v_1-et. Először azzal az esettel foglalkozunk, mikor $\overline{v_2v_9}$ hozzátartozik a felbontáshoz. Ekkor a 4.1. Állítás alapján a $v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9$ nyolcszög letűzhető egyetlen éllel, továbbá a v_2 és v_9 csúcsok valamelyikével, amiből az állítás következik. Ezért a továbbiakban, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a $\overline{v_1v_3}$, $\overline{v_1v_4}$, $\overline{v_1v_5}$ élek közül az egyik hozzátartozik a felbontáshoz.

1. ESET: $\overline{v_1v_3}$ hozzátartozik a felbontáshoz. A 4.1. és 4.3. Állítások szerint a $v_1v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_9$ nyolcszög letűzhető egyetlen éllel, valamint a v_1 illetve a v_3 csúcsok valamelyikével, amiből az állítás adódik.

2. ESET: $\overline{v_1v_4}$ hozzátartozik a felbontáshoz. A $v_1v_4v_5v_6v_7v_8v_9$ hétszög letűzhető egyetlen éllel, $\overline{v_1v_4}$ pedig mindig letűzi a $v_1v_2v_3v_4$ négyszöget.

3. ESET: $\overline{v_1v_5}$ hozzátartozik a felbontáshoz. A $v_1v_5v_6v_7v_8v_9$ hatszög letűzhető egyetlen éllel, valamelyik v_1-ből induló él pedig letűzi a $v_1v_2v_3v_4v_5$ ötszöget (v.ö. 4.2. Állítás). □

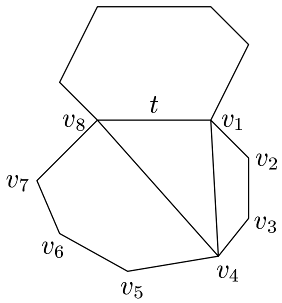
4.5. Tétel. *Minden $n \geqslant 4$ csúcsú háromszögfelbontás letűzhető $\lfloor n/4 \rfloor$ éllel.*

Bizonyítás. A tételt a szögpontok n száma szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. A 4.2., 4.3., 4.4. Állításokból következik, hogy $n \leqslant 9$ esetén a tétel igaz. Ezért legyen $n > 9$ és tegyük fel, hogy minden n-nél kevesebb szögpontú háromszögfelbontásra teljesül az állítás. Tekintsünk egy olyan G háromszögfelbontást, amelynek n szögpontja van.

Először megmutatjuk, hogy G-nek van olyan t átlója, amely G-ből 5, 6, 7 vagy 8 oldalt vág le. Legyen t egy olyan átló amely minimális számú, de legalább 5 oldalt vág le G-ből. Tegyük fel, hogy ezeknek az oldalaknak a száma k. Jelölje G szögpontjait az óramutató járása szerint $v_1, v_2, \ldots, v_n$ úgy, hogy $t = \overline{v_1 v_{k+1}}$. A t átlóra illeszkedő háromszögek valamelyikének v_s harmadik csúcsára nyilván $2 \leqslant s \leqslant k$. Ám a t átló megválasztása miatt $s \leqslant 5$ és $k+1-s \leqslant 4$, ahonnan $k \leqslant 8$. Jelölje G_1 és G_2 azokat a $k+1$ illetve $n-k+1$ szögpontú háromszögfelbontásokat, amelyekre a t átló G-t bontja.

1. ESET: $k = 5$ vagy $k = 6$. Az indukciós feltevés szerint ekkor G_1 lapjai egyetlen éllel, G_2 lapjai pedig $\lfloor (n-k+1)/4 \rfloor \leqslant \lfloor (n-4)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor - 1$ éllel letűzhetők.

2. ESET: $k = 7$. Tekintsük G_1-ben a t átlóra támaszkodó $v_1 v_s v_8$ háromszöget. A t átló megválasztása miatt ekkor $s = 4$ vagy $s = 5$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $s = 4$ (ld. 4.3. ábra).



4.3. ábra

2.1. ESET: $\overline{v_2 v_4}$ hozzátartozik G_1-hez. Az indukciós feltevés szerint ekkor G_2 lapjai $\lfloor (n-7+1)/4 \rfloor \leqslant \lfloor n/4 \rfloor - 1$ éllel letűzhetők, G_1-et pedig nyilván letűzi az a v_4 végpontú él, amely letűzi a $v_4 v_5 v_6 v_7 v_8$ ötszöget.

2.2. ESET: $\overline{v_1 v_3}$ tartozik hozzá G_1-hez. Legyen $G_0 = G_2 \cup v_1 v_3 v_4 \cup v_1 v_4 v_8$. Most az indukciós feltevés szerint G_0 letűzhető $\lfloor (n-7+3)/4 \rfloor = \lfloor n/4 \rfloor - 1$ éllel.

2.2.1. ESET: v_1 vagy v_3 végpontú él tűzi le $v_1 v_3 v_4$-et. Ekkor a G_0-t letűző élhalmaz, kiegészítve egy a $v_4 v_5 v_6 v_7 v_8$ ötszöget letűző éllel letűzi G-t is.

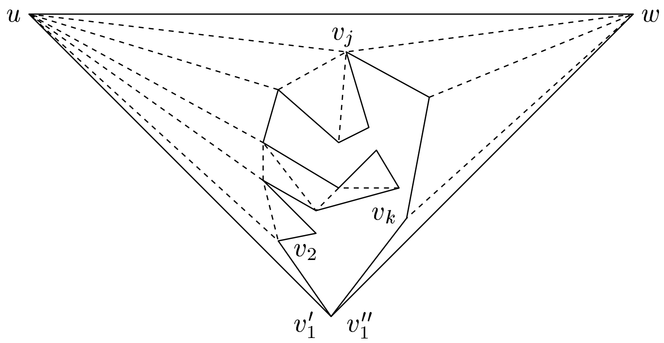
2.2.2. ESET: v_4 végpontú él tűzi le $v_1 v_3 v_4$-et. Világos, hogy ez csak a $\overline{v_4 v_8}$ él lehet. Most a G_0-t letűző élhalmaz, kiegészítve a $\overline{v_1 v_8}$, valamint egy a $v_4 v_5 v_6 v_7 v_8$ ötszöget letűző éllel, a $\overline{v_4 v_8}$ él nélkül is letűzi G-t.

3. ESET: k=8. Ekkor G_2 lapjai letűzhetők $\lfloor(n-8+1-1)/4\rfloor \leqslant \lfloor n/4\rfloor - 2$ éllel, és a t átló valamelyik végpontjával, mondjuk v_1-gyel, az indukciós feltevés, valamint a 4.1. Állítás szerint. G_1-et pedig letűzi két olyan él, melyek egyike v_1-ből indul. □

Megjegyezzük, hogy ha egy n oldalú sokszögben az őrök csak a sokszög oldalai mentén mozoghatnak, akkor nem tudjuk, hogy $\lfloor n/4\rfloor$ sétáló őr mindig elég-e a sokszög belsejének őrzéséhez. Végül lássuk, mit mondhatunk egy sokszög külsejének sétáló őrökkel való védelméről.

4.6. Tétel. *Egy n oldalú sokszög külsejének védelméhez $\lceil n/4\rceil$ sétáló őr mindig elég.*

Bizonyítás. Legyen P tetszőleges n oldalú sokszög, és jelölje $v_1, v_2, \ldots, v_k$ a P konvex burkának csúcsait az óramutató járása szerint. Forgassuk el P-t úgy, hogy a konvex burok legalacsonyabban fekvő v_i, illetve legmagasabban fekvő v_j csúcsa egyértelmű legyen. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $i = 1$. Most bontsuk háromszögekre P konvex burkának azon részeit, amelyek nem tartoznak P-hez. Ezután jelöljünk ki a v_1v_j egyenes különböző partjain két, egymást illetve a v_1 és v_j csúcsokat is látó u és w pontot, majd kössük össze azokat egymással, valamint a konvex burok feléjük néző csúcsaival. Végül képzeletben vágjuk ketté a v_1 csúcsot v_1'-re és v_1''-re (most v_1', v_2, u illetve v_1'', v_k, w alkotnak egy-egy háromszöget), és tekintsük az így kapott $n+3$ szögpontú háromszögfelbontást (ld 4.4. ábra).



4.4. ábra

A 4.5. Tétel szerint ennek a háromszögfelbontásnak az élei közül kiválasztható $\lfloor(n+3)/4\rfloor = \lceil n/4\rceil$ úgy, hogy ezek az élek a felbontás összes háromszögét letűzik. Állítjuk, hogy a kiválasztott élek mentén sétáló őrök P egész külsejét védelmezik.

Világos, hogy P konvex burkának azon részei, melyek nem tartoznak P-hez védve vannak. Ezért elég csak a konvex burok külsejével foglalkozni. Tekintsük az $uv_1'v_2, uv_2v_3, \ldots, uv_{j-1}v_j$ valamint a $wv_jv_{j+1}, \ldots, wv_{k-1}v_k, wv_kv_1''$ háromszögeket. Természetesen ezek is le vannak tűzve, következésképpen legalább egyik csúcsuk valamelyik letűző él végpontja. Vegyük észre, hogy ha u-ból nem indul letűző él, akkor a $\overline{v_1'v_2}, \overline{v_2v_3}, \ldots, \overline{v_{j-1}v_j}$ élek mindegyikének valamely végpontjából indulni kell letűző élnek. Ezért a konvex burok külsejének a v_1v_j egyenes által határolt, az u pontot tartalmazó félsíkban levő része védve van. Hasonlóan, ha w-ből nem indul letűző él, akkor a $\overline{v_jv_{j+1}}, \ldots, \overline{v_{k-1}v_k}, \overline{v_kv_1''}$ élek valamely végpontjából indul letűző él. Így a konvex burok külsejének a v_1v_j egyenes által határolt, a w pontot tartalmazó félsíkban levő része is védve van. □

Hivatkozások

[1] Aggarwal, A.: *The art gallery theorem: its variations, applications, and algorithmic aspects*, Ph.D. Thesis, Johns Hopkins University, 1984.

[2] Chazelle, B.: Triangulating a simple polygon in linear time, *Discrete Comput. Geom.* **6** (1991), 485-524.

[3] Chvátal, V.: A combinatorial theorem in plane geometry, *J. Combinatorial Theory* **B18** (1975), 39-41.

[4] Fisk, S.: A short proof of Chvátal's watchman theorem, *J. Combinatorial Theory* **B24** (1978), 374.

[5] Füredi, Z., Kleitman, D.J.: The prison yard problem, *Combinatorica* **14** (1994), 287-300.

[6] O'Rourke, J.: Galleries need fewer mobile guards: a variation on Chvátal's theorem, *Geom. Dedicata* **14** (1983), 273-283.

[7] O'Rourke, J.: *Art gallery theorems and algorithms*, Oxford University Press, 1987.