# Bevezetés a Számítógéppel Segített Geometriai Tervezésbe

Hermann Tamás

November 8, 1996

# Contents

# Fejezet 1

# Bevezetés

A számítógéppel segített geometriai tervezés (angolul: Computer Aided Geometric Design, röviden CAGD) viszonylag rövid múltra tekinthet vissza: az első átfogó monográfia ([FP79]) csak 1979-ben jelent meg. Ennek az oka részben az, hogy a megfelelő teljesítményű számítógépek csak a 70-es években jelentek meg, részben pedig az, hogy az első ipari rendszerek (melyeket már a hatvanas években kezdtek fejleszteni) nem voltak nyilvánosak, az ezzel kapcsolatos eredmények ipari titoknak számítottak. Természetesen a mai kereskedelmi rendszerek sem hozzák nyilvánosságra az alkalmazott algoritmusokat, de most már széleskörű, intenzív kutatás folyik ezen a területen, melynek az eredményeit közzéteszik a különböző nyilvános fórumokon, mint pl. a *Computer Aided Design* és a *Computer Aided Geometric Design* folyóiratokban vagy pedig a sűrűn megrendezett szakkonferenciák kiadványaiban. Számos tankönyv, illetve monográfia jelent meg erről a területről. A legfontosabbakat az irodalomjegyzékben feltüntettük [Cho91, Far92, Far94, FP79, Hof89, Hos92, HL93, Män88, Mor85, SDY89, Yam88].

A matematika különböző területei kapcsolódnak itt össze: hagyományos (elemi) geometria, differenciálgeometria, diszkrét geometria, algebra, numerikus módszerek, differenciálegyenletek stb. Érdekes módon a vizsgált problémák olyan matematikai kérdéseket is felszínre hoznak, amelyeket a múlt században vagy még régebben megoldottak, és közben feledésbe merültek. Másrészt vannak olyan "klasszikus" kérdések is, melyekre új, számítógép inspirálta megoldások születtek.

A cél: minél könnyebben, amit csak lehet automatizálva, létrehozni különböző geometriai objektumok számítógépes reprezentációját és ezt különböző alkalmazásokban használni. Ilyen alkalmazás lehet pl. egyszerűen csak egy modell megjelenítése, vagy egy számjegyvezérlésű (numeric control – NC) szerszámgép vezérlő utasításainak automatikus generálása, stb.

Egy geometriai objektumot többféleképpen is el lehet képzelni. Az egyik koncepció a geometriai objektumot térben kiterjedt testként kezeli és azt egyszerűbb, számítógépben könnyen reprezentálható, ún. primitív objektumok segítségével írja le. A primitív objektumok általában: poliéderek, gömb, henger, kúp, tórusz stb. A primitívek megválasztása modellezőrendszerenként változhat.

A halmazelméleti egyesítés és kivonás – az ún. Boole műveletek – segítségével nagyon változatos formájú alakzatokat készíthetünk. Ezeknek az alakzatoknak a felületének bonyolultságát korlátozhatja a használt primitívek tipusa. Az ilyen fajta testépítéssel foglalkozik az ún. *szilárd test modellezés* (*solid modeling*).

Egy másik megközelítés a geometriai objektumot csak mint felületet fogja fel, viszont megenged nagy változatosságú paraméteres felületelemeket, amiket aránylag magasfokú polinomok, illetve racionális törtfüggvények segítségével írhatunk le. Ezt a megközelítést *felület modellezés*nek (*surface modeling*) nevezik.

Mára a legfejlettebb modellezőrendszerekben ez a két irányzat lényegében összekapcsolódott: a szilárd test modellezők képesek bonyolult felületeket is fogadni, míg egyes felület modellezők pedig képesek Boole műveletekre.

Az elkövetkezőkben először a szükséges differenciálgeometriai ismereteket foglaljuk össze, majd a felületmodellezés néhány alapproblémáját, megoldási módszerét tárgyaljuk.

# Fejezet 2

# Differenciálgeometriai összefoglaló

Itt nem törekszünk semmilyen értelemben sem teljességre. Szándékunk az, hogy vázlatosan, néha csak jelzés értékűen, felsoroljuk azokat a fogalmakat, amelyekre a későbbiekben szükség lesz. Ezt annál is inkább tehetjük, mivel erről bőséges magyar nyelvű irodalom áll rendelkezésre, pl. [RT72, Szo73, SNGN79]. Mi főként az utóbbi kettőre támaszkodtunk.

## 2.1 Vektorok

**Vektor**nak az $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ tér elemeit fogjuk nevezni, és a vektorokat mindig félkövéren szedett (**bold**) betűkkel jelöljük:

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Az $\mathbb{R}^n$ tér elemei között értelmezzük a **skaláris szorzatot**. A skaláris szorzat az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges két $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ eleméhez egy valósszámot rendel:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

A skaláris szorzatból származtatott normát **abszolút érték**nek hívjuk:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle}.$$

Két vektor **szög**ét az

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \alpha_{\mathbf{ab}}$$

reláció alapján definiáljuk, ahol az $\alpha_{\mathbf{ab}}$ szöget mindig $\pi$-nél kisebb-egyenlőnek tekintjük.
Két vektort **merőleges**nek nevezünk, ha a skaláris szorzatuk 0, azaz

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{a} \perp \mathbf{b}.$$

A kétdimenziós tér elemeit **síkvektor**oknak, a háromdimenziós tér elemeit **térvektor**oknak nevezzük.
A háromdimenziós tér koordinátatengely irányú egységvektorait így jelöljük:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

A háromdimenziós térben definiált az ún. **vektoriális szorzat**:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

Ennek egy geometriai értelmezése az, hogy a szorzatvektor merőleges a szorzókra, hossza pedig a szorzók által meghatározott paralelogramma előjeles területe. A hossz abszolút értéke:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\sin \alpha_{\mathbf{ab}}|.$$

Két vektort **párhuzamos**nak nevezünk, ha létezik olyan valós szám (**skalár**), hogy az egyik vektor a másik skalárszorosa. A definíció alapján könnyen látható, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha a vektoriális szorzatuk a $\mathbf{0}$ vektor:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}.$$

A vektoriális szorzatra igaz az ún.

**2.1.1. Tétel. (Kifejtési Tétel)**

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \mathbf{a}. \quad \blacksquare$$

Definiálhatjuk az ún. **hármas szorzatot**:

$$(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \times \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle.$$

Az $(\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c})$ hármas szorzat tekinthető az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektoriális szorzat és a $\mathbf{c}$ vektor skaláris szorzatának. Egy geometriai értelmezése pedig az $\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralellepipedon előjeles térfogata.

**Megjegyzés.** A fenti elemi geometriai anyag részletes kifejtése megtalálható pl. [Haj66]-ban.

## 2.2 Parametrikus görbék

**2.2.1. Definíció.** *Egy $[a, b]$ intervallumnak $\mathbb{R}^n$-be való folytonos leképezését* **parametrikus görbé***nek nevezzük.*

A következőkben általában, hacsak ezt külön nem említjük, akkor $n = 3$, azaz az $\mathbf{r}(t)$ görbe térgörbe és az alábbi módon írható:

$$\mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = r_1(t)\mathbf{i} + r_2(t)\mathbf{j} + r_3(t)\mathbf{k}.$$

A parametrikus görbe általánosabb fogalom, mint a függvény. Egy $f$ függvény gráfja (azaz az $(x, f(x))$ pontok halmaza) felfogható mint speciális parametrikus síkgörbe, ahol $x$ a paraméter.

**2.2.2. Példa.** *Az alábbiak példák síkgörbékre:*
*1.) $x = 0$, azaz egy függőleges egyenes.*
*2.) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [-\pi/4, \pi/4]$, a körvonal egy darabja.*

**Megjegyzés.** Görbét más módon is megadhatunk. Például implicit módon:

$$f(x, y) = 0.$$

Itt azon $(x, y)$ pontok tartoznak az implicit módon megadott síkgörbéhez, melyekre az $f(x, y) = 0$ egyenlet teljesül.

**2.2.3. Példa.**

$$(x - 5)^2 + y^2 - 4 = 0$$

*az $(5, 0)$ középpontú, 2 sugarú kör egyenlete.*

**2.2.4. Definíció.** *Az* $\mathbf{r}(t)$ **egyszerű görbeív (reguláris)**, *ha* $t \to \mathbf{r}(t)$ *egy-egy értelmű, azaz*

$$\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad t_1 = t_2.$$

**2.2.5. Definíció.** *Egy egyszerű görbeív* $\mathbf{r}_1(t)$ $(a \le t \le b)$ *és* $\mathbf{r}_2(\tau)$ $(\alpha \le \tau \le \beta)$ *paraméteres előállítását akkor nevezzük* **ekvivalensnek,** *ha létezik olyan* $\varphi(\tau)$ *függvény az* $[\alpha, \beta]$ *intervallumon és olyan* $A$ *és* $B$ *pozitiv számok, hogy tetszőleges* $\tau_1, \tau_2 \in [\alpha, \beta]$ *esetén*

$$A < \left| \frac{\varphi(\tau_1) - \varphi(\tau_2)}{\tau_1 - \tau_2} \right| < B$$

*továbbá* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *(vagy* $\varphi(\beta) = a$ *és* $\varphi(\alpha) = b$*) és* $\mathbf{r}_1(\varphi(t)) = \mathbf{r}_2(t)$. *Az ilyen* $\varphi(\tau)$ *függvényt* **átparaméterező** *függvénynek nevezzük.*

**Megjegyzés.** Nyilvánvaló, hogy $\varphi(\tau)$ folytonos, szigorúan monoton és amennyiben differenciálható, akkor $|\dot{\varphi}(\tau)| > 0$.

**2.2.6. Definíció.** *Egy* $\mathbf{r}\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *parametrikus görbe deriváltja:*

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}.$$

**2.2.7. Jelölés.** *Az* $\mathbf{r}(t)$ *görbe* $t$ *paraméter szerinti deriváltjának jelölésére sokszor használjuk az alábbi rövid alakot is:*

$$\dot{\mathbf{r}}(t) := \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

**2.2.8. Tétel.** *Egy* $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \ldots, r_n(t))$ *parametrikus görbe akkor és csak akkor folytonosan differenciálható, ha* $r_i(t)$ *folytonosan differenciálható* $(i = 1, \ldots, n)$.■

A továbbiakban, hacsak az ellenkezőjét nem mondjuk, akkor a görbékről feltesszük, hogy folytonosan differenciálhatóak.

Könnyű számolással adódik a következő

**2.2.9. Tétel.** *Legyenek* $\mathbf{a}(t)$ *és* $\mathbf{b}(t)$ *parametrikus görbék és legyen* $\lambda(t)$ *egy folytonosan differenciálható valós függvény. Ekkor*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\lambda \mathbf{a}) &= \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{a} + \lambda \frac{d\mathbf{a}}{dt} \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\
\frac{d}{dt}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle &= \langle \frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \rangle + \langle \mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \rangle \\
\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\
\frac{d}{dt}|\mathbf{a}| &= \frac{\langle \mathbf{a}, \frac{d\mathbf{a}}{dt} \rangle}{|\mathbf{a}|} \\
\frac{d}{dt}\mathbf{a}(\lambda) &= \frac{d\mathbf{a}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Tekintsünk egy $\mathbf{r}(t)$ egyszerű görbeívet. Az $[a, b]$ intervallumot a $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ osztópontokkal bontsuk fel véges sok részre. Az $\mathbf{r}(t_i)$ görbepontot nevezzük $\mathbf{R}_i$-nek és az $\mathbf{R}_i$ pontok által meghatározott töröttvonalat pedig **görbébe írt poligon**nak.

**2.2.10. Definíció.** *Az* $\mathbf{r}(t)$ *egyszerű görbeívet* **rektifikálható***nak nevezzük, ha tetszőleges beírt poligon hossza egy korlát alatt marad. Ha a görbeív rektifikálható, akkor az összes beírt poligonok hosszának felső határát a görbe* **ívhosszá***nak nevezzük.*

**2.2.11. Tétel.** *Ha az* $\mathbf{r}(t)$ $(a \le t \le b)$ *egyszer folytonosan differenciálható vektor-skalár függvény egyszerű ívet ad meg, akkor ennek az egyszerű görbének létezik ívhossza és az ívhossz képlete:*

$$s = \int_a^b \sqrt{(\dot{r}_1(t))^2 + (\dot{r}_2(t))^2 + (\dot{r}_3(t))^2}dt = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)|dt.$$

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{r}}(\tau)|d\tau$$
$$\dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{r}}(t)|. \blacksquare$$

$s(t)$ egy pozitív mennyiség integrálja, így szigorúan monoton, létezik az inverz függvénye, amely szintén szigorúan monoton és folytonosan differenciálható: $t = t(s)$.

**2.2.12. Definíció.** *Az* $\hat{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}(t(s))$ *ívhossz szerinti paraméterezést a görbe* **természetes** *paraméterezésének nevezzük.*

**2.2.13. Jelölés.** *Az ívhossz szerint való differenciálásra külön jelölést vezetünk be:*

$$\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

**2.2.14. Tétel.** *Az ívhossz szerint való első és második deriváltra teljesül:* $|\mathbf{r}'| = 1$ *és* $\mathbf{r}' \perp \mathbf{r}''$.

**Bizonyítás.** Egyrészt

$$\frac{\mathbf{r}(t)}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{r}}\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \dot{\mathbf{r}}\frac{1}{|\dot{\mathbf{r}}|}.$$

Az állítás másik részét az

$$\mathbf{r}'(t)^2 = 1$$

egyenlet deriválásából kapjuk. A jobboldal konstans, így a deriváltja 0. Így

$$2\langle \mathbf{r}', \mathbf{r}'' \rangle = 0$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{r}'$ és $\mathbf{r}''$ merőlegesek egymásra. $\blacksquare$

**2.2.15. Példa.** *Tekintsük a kör egy racionális törtfüggvényekkel való parametrikus előállítását, deriváltját, ívhosszát:*

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$$
$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \left(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, -\frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)$$
$$s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{r}}(t)|dt = \int_0^t \frac{2}{1+t^2} = 2\text{arctg}\, t$$
$$t(s) = \text{tg}\frac{s}{2}$$
$$\mathbf{r}(t(s)) = (\sin s, \cos s).$$

**2.2.16. Tétel.** *Ha* $|\dot{\mathbf{r}}(t)| > 0$, *akkor a paraméterezés ekvivalens az ívhosszal.* $\blacksquare$

**2.2.17. Példa.** *Ívhosszal nem ekvivalens paraméterezés:*

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (-t^2, t^2) & \text{ha } t < 0, \\ (t^2, t^2) & \text{ha } t \ge 0, \end{cases}$$

*Habár* $\mathbf{r}$ *differenciálható, az alakja nem sima, a* $t = 0$ *pontban a görbe törik. (Vegyük észre, hogy a görbe két, az origóból 45 fok alatt induló, degeneráltan paraméterezett félegyenesből áll.)*

**2.2.18. Definíció.** *Definíció szerint az ívhossz szerinti derivált $\mathbf{r}'(s)$ a beírt húrok határértéke, amit* **érintő egységvektor***nak hívunk.*

**2.2.19. Definíció.** *A görbe adott $\mathbf{r}(s)$ pontján átmenő, ott az érintő egységvektorra merőleges síkot* **normálsík***nak nevezzük. Egyenlete: $\langle \mathbf{q}-\mathbf{r}(s), \dot{\mathbf{r}}(s)\rangle = 0$, ahol $\mathbf{q}$ a sík pontja.*

**2.2.20. Tétel.** *Ha az $\mathbf{r}(t)$ paraméterezésű egyszerű görbeív $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ és $\mathbf{P}_3$ pontja a $\mathbf{P}_0$ ponthoz tart, és e pontban $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}} \neq \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ és $\mathbf{P}_3$ ponton átfektetett sík meghatározott határhelyzethez tart. Ezt a síkot* **simulósíknak** *hívjuk. A simulósík egyenlete: $\langle \mathbf{q}-\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\rangle = 0$ ahol $\mathbf{q}$ a sík egy pontja.*

**Bizonyítás.** Legyen $t_1 < t_2 < t_3$, $\Delta t_1 = t_2 - t_1$, $\Delta t_2 = t_3 - t_2$, $\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$ és $\Delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_3) - \mathbf{r}(t_2)$. A görbét a $t_2$ körül sorbafejtve kapjuk:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_2) + \dot{\mathbf{r}}(t_2)(t-t_2) + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(t_2)(t-t_2)^2 + o((t-t_2)^2).$$

Azt szeretnénk belátni, hogy $\Delta\mathbf{r}_1 \times \Delta\mathbf{r}_2$ iránya egy állandó vektorhoz tart és az párhuzamos $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$-tal. Könnyű számolás adja, hogy:

$$\frac{\Delta\mathbf{r}_1 \times \Delta\mathbf{r}_2}{\Delta t_1 \Delta t_2(\Delta t_1 + \Delta t_2)} \to \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}.$$

■

**Megjegyzés.** Egyenesnek nincs simulósíkja!

**2.2.21. Tétel.** *Legyen az egyszerű görbeív paraméterezése kétszer folytonosan differenciálható. Ha az ív $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ és $\mathbf{P}_3$ pontja tart az $\mathbf{r}(s)$ helyvektorú $\mathbf{P}_0$ ponthoz, és $\mathbf{r}''(s) \neq \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ és $\mathbf{P}_3$ pontra illeszkedő kör meghatározott határhelyzethez tart. E kört a görbe $\mathbf{P}_0$ pontbeli* **simulókörének** *vagy* **görbületi körének**, *e kör sugarát $\mathbf{P}_0$-beli* **görbületi sugárnak,** *sugarának reciprokát pedig $\mathbf{P}_0$-beli* **görbületnek** *nevezzük.*

*A görbület egyenlete:*

$$\kappa = |\mathbf{r}''| = |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}.$$

**Bizonyítás.** Az $a$,$b$,$c$ oldalú és $t$ területű háromszög köré írt kör sugara: $R = \dfrac{abc}{4t}$. A háromszög oldalai most $\Delta\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}_2$ és $\Delta\mathbf{r}_3$:

$$R = \lim \frac{|\Delta\mathbf{r}_1|\cdot|\Delta\mathbf{r}_2|\cdot|\Delta\mathbf{r}_3|}{2|\Delta\mathbf{r}_1 \times \Delta\mathbf{r}_2|} = \lim \frac{\Delta s_1 \Delta s_2(\Delta s_1 + \Delta s_2)}{2|\Delta\mathbf{r}_1 \times \Delta\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(s_0)\times\mathbf{r}''(s_0)|} = \frac{1}{|\mathbf{r}''(s_0)|}.$$

A középpontba mutató vektor iránya

$$(\Delta\mathbf{r}_1 \times \Delta\mathbf{r}_2)\times\Delta\mathbf{r}_1 \parallel 2\frac{\Delta\mathbf{r}_1 \times \Delta\mathbf{r}_2}{\Delta s_1 \cdot \Delta s_2(\Delta s_1 + \Delta s_2)} \times \frac{\Delta\mathbf{r}_1}{\Delta s_1} \to (\mathbf{r}'(s_0)\times\mathbf{r}''(s_0))\times\mathbf{r}'(s_0).$$

A kifejtési tétel szerint

$$(\mathbf{r}'\times\mathbf{r}'')\times\mathbf{r}' = \langle\mathbf{r}',\mathbf{r}'\rangle\mathbf{r}'' - \langle\mathbf{r}'',\mathbf{r}'\rangle\mathbf{r}' = (\mathbf{r}')^2\mathbf{r}'' = \mathbf{r}''.$$

■

**2.2.22. Definíció.** *A görbe egy adott pontjához hozzárendelhetünk három, alább megadott, egymásra merőleges vektort, az ún.* **kísérő triéder***t:*

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{r}' && \textbf{érintő} \textit{ egységvektor,} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{r}''}{|\mathbf{r}''|} && \textbf{főnormális} \textit{ egységvektor,} \\ \mathbf{b} &= \mathbf{e}\times\mathbf{n} && \textbf{binormális} \textit{ egységvektor.} \end{aligned}$$

**2.2.23. Tétel.** *Könnyű számolással igazolhatóak az alábbi formulák:*

$$\mathbf{r}' = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$
$$\mathbf{r}'' = \frac{\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}^2 - \langle\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}\rangle\dot{\mathbf{r}}}{\dot{\mathbf{r}}^4}$$

$$\mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$$
$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}^2 - \langle\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}\rangle\dot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}^2 - \langle\ddot{\mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}\rangle\dot{\mathbf{r}}|}$$
$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}. \quad \blacksquare$$

**2.2.24. Definíció.** *Egy háromszor folytonosan differenciálható görbe* **torziójának (csavarodás)** *a binormális szögsebességét nevezzük és $\tau$-val jelöljük.*

**2.2.25. Tétel.** *A torziót a következő képlettel számíthatjuk ki:*

$$\tau = -\langle\mathbf{b}',\mathbf{n}\rangle = \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{r}''\mathbf{r}''')}{\kappa^2}$$

**Bizonyítás.** Jelöljük a binormális szögének a változását, azaz $\mathbf{b}(s)$ és $\mathbf{b}(s+\Delta s)$ szögét $\Delta\beta$-val. Ekkor

$$|\tau| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\beta}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\Delta\beta}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\mathbf{b}(s)\times\mathbf{b}(s+\Delta s)|}{\Delta s} =$$
$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\mathbf{b}(s)\times\frac{\mathbf{b}(s+\Delta s)-\mathbf{b}(s)}{\Delta s}\right| = |\mathbf{b}(s)\times\mathbf{b}'(s)| = |\mathbf{b}'(s)|.$$

Differenciáljuk a $\langle\mathbf{b}(s),\mathbf{e}(s)\rangle = 0$ egyenletet:

$$0 = \langle\mathbf{b}',\mathbf{e}\rangle + \langle\mathbf{b},\mathbf{e}'\rangle = \langle\mathbf{b}',\mathbf{e}\rangle + \langle\mathbf{b},\mathbf{r}''\rangle = \langle\mathbf{b}',\mathbf{e}\rangle$$

Így $\mathbf{b}' \parallel \mathbf{n}$ és $|\mathbf{b}'| = |\langle\mathbf{b}',\mathbf{n}\rangle|$. Másrészt

$$\mathbf{b}' = (\mathbf{e}\times\mathbf{n})' = \mathbf{e}'\times\mathbf{n} + \mathbf{e}\times\mathbf{n}' = \mathbf{e}\times\mathbf{n}'$$

és

$$\mathbf{n}' = \left(\frac{\mathbf{r}''}{\kappa}\right)' = \frac{\kappa\mathbf{r}''' - \kappa'\mathbf{r}''}{\kappa^2}$$

ezért

$$\langle\mathbf{b}',\mathbf{n}\rangle = \frac{\mathbf{r}'\mathbf{r}'''\mathbf{r}''}{\kappa^2}.$$

$\blacksquare$

**2.2.26. Tétel.** *A kísérő triéder deriváltjait az ún.* **Frenet formulák** *irják le:*

$$\begin{aligned}\mathbf{e}' &= \qquad \kappa\mathbf{n},\\ \mathbf{n}' &= -\kappa\mathbf{e} \qquad +\tau\mathbf{b},\\ \mathbf{b}' &= \qquad -\tau\mathbf{n}.\end{aligned}$$

**Bizonyítás.** A korábbiak alapján csak a középső formulát kell igazolni:

$$\mathbf{n}' = \mathbf{b}'\times\mathbf{e} + \mathbf{b}\times\mathbf{e}' = -\tau\mathbf{n}\times\mathbf{e} + \kappa\mathbf{b}\times\mathbf{n} = \tau\mathbf{b} - \kappa\mathbf{e}.$$

$\blacksquare$

**2.2.27. Tétel.** *Ha az $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ $C^3$ térgörbe görbületét, ill. torzióját ugyanaz a $\kappa(s)$, ill. $\tau(s)$ függvény írja le ($s$ az ívhosszparaméter), akkor a két térgörbe lényegében azonos (mozgatással fedésbe hozhatók).*

**Bizonyítás.** Mozgassuk a két térgörbét úgy, hogy a kezdőpontjuk és ott a kísérő triéderük egybeessen. Jelöljük a két térgörbéhez tartozó kísérő triédereket $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{b}_1$-gyel, ill. $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{b}_2$-vel. Tekintsük az alábbi fügvényt:

$$\varphi(s) := \langle \mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)\rangle + \langle \mathbf{n}_1(s), \mathbf{n}_2(s)\rangle + \langle \mathbf{b}_1(s), \mathbf{b}_2(s)\rangle.$$

A Frenet formulák szerint a derivált

$$\varphi'(s) = \kappa\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{e}_2\rangle + \kappa\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{n}_2\rangle + \langle -\kappa\mathbf{e}_1 + \tau\mathbf{b}_1, \mathbf{n}_2\rangle + \langle \mathbf{n}_1, -\kappa\mathbf{e}_2 + \tau\mathbf{b}_2\rangle - \tau\langle \mathbf{n}_1, \mathbf{b}_2\rangle - \tau\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{n}_2\rangle = 0.$$

Így $\varphi$ állandó. A kezdőpontban $\varphi(0) = 3$, így mindenütt egyenlő 3-mal. Mivel $\varphi$ egységvektorok szorzatának összege, ezért $\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{e}_2(s)$, $\mathbf{n}_1(s) = \mathbf{n}_2(s)$, és $\mathbf{b}_1(s) = \mathbf{b}_2(s)$. Ebből következik, hogy

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_2(s)) = \mathbf{r}_1'(s) - \mathbf{r}_2'(s) = \mathbf{e}_1(s) - \mathbf{e}_2(s) = \mathbf{0},$$

tehát $\mathbf{r}_1(s) - \mathbf{r}_2(s)$ állandó vektor, de mivel a kezdőpontok egybeesnek, ez az állandó a $\mathbf{0}$. ■

## Geometriai folytonosság

**2.2.28. Definíció.** *Legyen adva két térgörbe: $\mathbf{r}_1(t)$ és $\mathbf{r}_2(t)$, amelyek a $t = t_0$ pontban megegyeznek: $\mathbf{r}_1(t_0) = \mathbf{r}_2(t_0)$. Ha a görbék úgy vannak paraméterezve, hogy ott a deriváltjaik megegyeznek, azaz*

$$\mathbf{r}_1^{(k)}(t_0) = \mathbf{r}_2^{(k)}(t_0) \qquad (k = 0, \ldots, n),$$

*akkor azt mondjuk, hogy a két görbének $C^n$ csatlakozása van.*

Sajnos ez nagyon keveset mond a görbék geometriai tulajdonságairól, pl. akár törhetnek is. Szükségünk lesz egy olyan fogalomra, ami a paraméterezéstől független és visszatükrözi a geometriai tulajdonságokat.

**2.2.29. Definíció.** *A közös $\mathbf{P}$ ponton átmenő $\mathbf{r}_1$ és $\mathbf{r}_2$ görbék a $\mathbf{P}$ pontban* **$n$-ed rendben érintik egymást** *(jelölésben: $G^n$), ha:*

$$\mathbf{P} = \mathbf{r}_1(s_0) = \mathbf{r}_2(s_0)$$
$$\frac{d^k\mathbf{r}_1(s_0)}{ds^k} = \frac{d^k\mathbf{r}_2(s_0)}{ds^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

*ahol $s$ az ívhossz paraméter.*

**Megjegyzés.** A legfontosabb különbség a két definíció között az, hogy $r' \neq \mathbf{0}$, hiszen az abszolút értéke 1.

Általában a görbéink nem ívhossz szerinti paraméterezéssel adottak. Természetesen megtehetjük, hogy kiszámítjuk mindkét görbe ívhossz szerinti deriváltjait, de ennél egyszerűbb az, hogy az egyik paraméterezést áttranszformáljuk a másikra. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a két görbének közös végpontja van.

Legyen adott a $\mathbf{p} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{q}(\tau) : [c, d] \to \mathbb{R}^3$ térgörbék és tegyük fel, hogy $\mathbf{p}(b) = \mathbf{q}(c)$ és $\dot{\mathbf{p}}(b) \neq \mathbf{0}$. Ekkor az, hogy $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ között $G^n$ kapcsolat van az ekvivalens egy olyan reparametrizáló $\varphi : [a, b] \to [a, b]$ leképezés létezésével, hogy

$$\varphi(b) = b \qquad \text{és} \qquad \varphi'(b) > 0$$
$$\left.\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{q}(t)\right|_{t=c} = \left.\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{p}(\varphi(t))\right|_{t=b} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Most nézzük meg közelebbről, hogy ez mit is jelent. A láncszabály alapján az általános esetben:

$$\mathbf{q}^{(i)}(c) = \sum_{j=0}^{i} a_{ij}\mathbf{p}^{(j)}(b), \qquad (i = 0, \dots, n)$$

ahol is (Faá di Bruno formulája szerint)

$$a_{i0} = \delta_{i0}, \qquad i = 0, \dots, n,$$
$$a_{ij} = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_i=j \\ k_1+2k_2+\dots ik_i=i \\ k_1,\dots,k_i\geq 0}} \begin{bmatrix} i \\ k_1 \dots k_i \end{bmatrix} \beta_{k_1} \dots \beta_{k_i}, \qquad 1 \leq j \leq i \leq n.$$

Itt

$$\beta_k = \varphi^{(k)}(b), \qquad (k = 1, \dots, n)$$

és

$$\begin{bmatrix} i \\ k_1 \dots k_i \end{bmatrix} = \frac{i!}{k_1!(1!)^{k_1} \dots k_i!(i!)^{k_i}}$$

Speciálisan

$$a_{ii} = (\beta_1)^i$$

ahol

$$\beta_1 = \varphi'(b) > 0.$$

Mátrix formában:

$$\left[\mathbf{q}(c), \mathbf{q}'(c), \dots, \mathbf{q}^{(n)}(c)\right]^T = A\left[\mathbf{p}(b), \mathbf{p}'(b), \dots, \mathbf{p}^{(n)}(b)\right]^T$$

ahol $A = [a_{ij}]$ az ún. **kapcsolódási mátrix**.

**Megjegyzés.** A (folytonosan csatlakozó) $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ görbékre a $G^1$ elsőrendű geometriai folytonosság ekvivalens az érintőirány folytonosságával. Valóban:

$$\dot{\mathbf{q}}(c) = \dot{\mathbf{p}}(b)\dot{\varphi}(b),$$

ami azt jelenti, hogy a megfelelő derivált vektorok párhuzamosak és egyirányúak. Ha csak párhuzamosak, de nem egyirányúak, az azt jelenti, hogy a két görbe csúcsban (cusp) találkozik. Ld. a 2.6 példát.

Fordítva, ha $\mathbf{q}(c) = \mathbf{p}(b)$ és létezik olyan $\beta_1 > 0$ konstans, hogy

$$\dot{\mathbf{q}}(c) = \beta_1\dot{\mathbf{p}}(b),$$

azaz a deriváltak párhuzamosak és egyirányúak, akkor pl. a $\varphi(t) = b + \beta_1(t - b)$ egy alkalmas (lokális) reparametrizáló leképezés. A kapcsolódási mátrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_1 \end{bmatrix}.$$

**Megjegyzés.** A másodrendű folytonosságból következik a görbület folytonossága:

$$|\mathbf{p}''| = |\mathbf{q}''|$$

de visszafelé csak akkor igaz, ha nem csak az (előjeles) görbületek egyenlőek, hanem a főnormálisok is.

**2.2.30. Példa.** *Harmadrendű folytonosság esetén a kapcsolódási mátrix:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & \beta_1^2 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 3\beta_1\beta_2 & \beta_1^3 \end{bmatrix}.$$

**2.2.31. Példa.** *Tekintsük az alábbi két (az egyszerűség kedvéért természetes módon paraméterezett) térgörbét:*

$$\mathbf{p}(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad \mathbf{q}(0) = (1, 0, 0).$$

*Könnyen látható, hogy folytonosan kapcsolódnak:*

$$\mathbf{p}(0) = (1, 0, 0) \qquad \mathbf{q}(0) = (1, 0, 0)$$

*és elsőrendű deriváltjaik is megegyeznek:*

$$\mathbf{p}'(0) = (0, 1, 0) \qquad \mathbf{q}'(0) = (0, 1, 0),$$

*azaz $G^1$ folytonosak. Mivel mindegyik egy 1 sugarú körvonal, a görbületük értéke is megegyezik: 1. Mégsem $G^2$ a kapcsolódásuk mivel*

$$\mathbf{p}''(0) = (-1, 0, 0) \qquad \mathbf{q}(0)''(0) = (0, 0, 1)$$

*azaz a második (ívhosszszerinti) deriváltjaik különböznek.*

**2.2.32. Példa.** *A következő (degeneráltan paraméterezett) végtelen sokszor differenciálható görbének a 0 pontban* **cusp (csúcs)** *pontja van:*

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3).$$

*Ld. 2.1 ábra.*

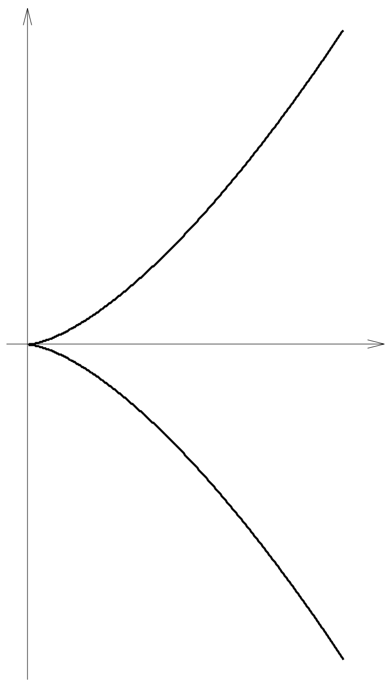

Figure 2.1: $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$

## 2.3 Parametrikus felületek

**2.3.1. Definíció. Elemi felületnek** *nevezzük az egységnégyzet* **topologikus,** *azaz egy-egy értelmű, kölcsönösen folytonos képét.* **Felületen** *olyan ponthalmazt értünk, amely összerakható elemi felüleletekből.*

**Megjegyzés.** Az, hogy az egységnégyzet, és nem valami más síkbeli alakzat, pl. egy háromszög stb. szerepel a definicióban nyilván nem lényeges. Azért ezt választottuk, mert egyrészt megkönnyíti a jelöléseket és a legtöbb alkalmazásban pont ezt fogjuk használni.

**2.3.2. Példa.** *A tórusz felülete nyilván nem elemi felület, de könnyen összerakható elemi felületekből.*

A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathbf{r}: [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$
$\mathbf{r}(u,v)$ topologikus,
$\mathbf{r}(u,v)$ (legalább) egyszer folytonosan differenciálható,
$\mathbf{r}_u(u,v) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \nparallel \mathbf{r}_v(u,v) = \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.
Felületet más módon is szokásos megadni. Egy fontos módszer egy kétváltozós függvény segítségével való (Euler-Monge féle) felület megadás. Itt a felület $(x,y,z)$ pontjai között a következő összefüggés teljesül:

$$z = f(x,y)$$

azaz

$$\mathbf{r}(x,y) = (x,y,f(x,y)).$$

Egy másik szokásos felület megadási módszer az **implicit** alak: $f(x,y,z)=0$, azaz azon $(x,y,z)$ pontok tartoznak a felülethez, amelyekre a fenti egyenlet teljesül.

**Megjegyzés.** Ha egy felület implicit megadásában szereplő $f$ függvény polinom, akkor a felületet **algebrai felület**nek nevezzük.

**2.3.3. Példa.** *Az algebrai felületek egy fontos osztálya az ún.* **másodrendű felületek***:*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 +$$
$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

**Megjegyzés.** *A másodrendű felületek általános tárgyalását ld. pl. [Haj66].*

*Néhány speciális másodrendű felület:*
*Gömb:* $x^2+y^2+z^2-r^2=0$.
*Henger:* $x^2+y^2-r^2=0$.
*Egyenes körkúp:* $x^2+y^2-r^2z^2=0$.

**Megjegyzés.** Azon parametrikus felületek, melyeket (vektor értékű) racionális törtfüggvényyel adhatunk meg, algebrai felületek, azaz mindig előállíthatjuk őket egy polinom nullhelyeiként. Fordítva ez nem igaz, nem minden algebrai felületet lehet olyan parametrikus felülettel előállítani, ahol a koordináta függvények a paraméterek racionális törtfüggvényei.

**2.3.4. Definíció.** *A* $\mathbf{g}(t)$ *görbe az* $\mathbf{r}(u,v)$ *felület* **felületi görbéje**, *ha* $\mathbf{g}(t) = \mathbf{r}(u(t),v(t))$ *ahol* $\mathbf{r}(t) = (u(t),v(t))$ *egy valamilyen síkgörbe.*

**2.3.5. Definíció.** *A* $\mathbf{g}(t) = \mathbf{r}(t,v)$ *és* $\mathbf{h}(t) = \mathbf{r}(u,t)$ *felületi görbéket* **paraméter vonalaknak** *hívjuk.*

**2.3.6. Tétel.** *A felület* $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ *pontján átmenő és e pontban differenciálható felületi görbék érintői egy síkban vannak* **(érintő sík).**■

**2.3.7. Definíció.** *Az érintő sík normálisát a* **felület normális***ának nevezzük.*

**2.3.8. Tétel.**

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$$

*a felületi egység normális.* ■

**2.3.9. Tétel.** *Implicit megadás esetén ($f(x,y,z) = 0$) a felületi normális a gradiens vektor: $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$.*

**Bizonyítás.** Tekintsük a felület egy lokális parametrizálását:

$$x = x(u,v) \quad y = y(u,v) \quad z = z(u,v)$$

és számítsuk ki az $u$ és $v$ szerinti parciális deriváltakat:

$$f_x x_u + f_y y_u + f_z z_u = 0 \qquad \text{és} \qquad f_x x_v + f_y y_v + f_z z_v = 0$$

azaz $\nabla f$ merőleges az érintősíkra. ■

**2.3.10. Tétel.** *A $\mathbf{g}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ felületi görbe ívhossza:*

$$s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{g}}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\mathbf{r}_u^2 \dot{u}^2 + 2\langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_v^2 \dot{v}^2} dt$$

■

**2.3.11. Definíció. Első alapmennyiségek:**

$$E = \mathbf{r}_u^2 \qquad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle \qquad G = \mathbf{r}_v^2$$

*így az* **első alapforma:**

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

*valamint az* **első alapmátrix:**

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

**2.3.12. Tétel.**

$$EG - F^2 = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2 > 0.$$

**Bizonyítás.**

$$\mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 - \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle^2 = \mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 (1 - \cos^2 \alpha) = \mathbf{r}_u^2 \mathbf{r}_v^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|^2.$$

■

**2.3.13. Következmény.** *$\mathcal{G}$ pozitiv definit.*

**2.3.14. Definíció.** *A $T$ tartományon definiált $\mathbf{r}(u,v)$ felület* **felszinét** *a következő képlet szolgáltatja:*

$$\iint_T \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Nem bizonyítjuk az alábbi tételt:

**2.3.15. Tétel.** *A felszín definíciója nem függ a paraméterezéstől.*■

**2.3.16. Definíció.** *Egy kétszer folytonosan differenciálható felület* **második alapmennyiségeinek** *nevezzük a következőket:*

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{m} \rangle \qquad M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{m} \rangle \qquad N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{m} \rangle,$$

*így a* **második alapforma:**

$$L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2,$$

*valamint a* **második alapmátrix:**

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

**Megjegyzés.** Young tétele értelmében $\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu}$.

Tekintsük a felület Taylor sorfejtését a másodrendű tagokig:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u+h, v+k) - \mathbf{r}(u,v) =& \mathbf{r}_u(u,v)h + \mathbf{r}_v(u,v)k + \\ & \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_{uu}(u,v)h^2 + 2\mathbf{r}_{uv}(u,v)hk + \mathbf{r}_{vv}(u,v)k^2\right) + \\ & o(h^2+k^2). \end{aligned}$$

Ha mindkét oldalt skalárisan megszorozzuk az $(u,v)$ pontbeli felületi egységnormálissal, akkor a jobboldalon az elsőrendű tagok kiesnek és a domináns rész a második alapforma lesz.

**2.3.17. Definíció.** *Az alábbi felületet (az* $\mathbf{r}(u,v)$ *felülethez tartozó)* **oszkuláló paraboloidnak** *hívjuk:*

$$\zeta = \frac{1}{2}(L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2)$$

**Megjegyzés.** Az oszkuláló paraboloid az $\mathbf{r}(u,v)$ felület másodrendű közelítése az $(u,v)$ pontban.

**2.3.18. Definíció.** *A felületi görbe* $\mathbf{P}$ *pontjabeli felületi normális és érintő irány által meghatározott síkot* **normálsíknak,** *a normálsík által a felületből kimetszett görbét pedig* **normálmetszetnek** *nevezzük. Egy olyan síkmetszetet, mely nem normálmetszet,* **ferdemetszetnek** *nevezünk.*

*A normálmetszethez tartozó görbületet* **normálgörbületnek** *hívjuk. A normálgörbületek maximumát és minimumát* **főgörbületeknek**, *a hozzájuk tartozó irányokat pedig* **főirányoknak** *nevezzük.*

**2.3.19. Tétel.** *Ha az* $\mathbf{r}(u,v)$ *felület* $\mathbf{g}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t))$ *felületi görbéjének a* $t_0$*-beli simulósíkja nem egyezik meg a felület e pontbeli érintősíkjával, akkor ezen felületi görbe e pontbeli görbülete*

$$\kappa = \frac{1}{\langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle} \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

*ahol* $\mathbf{m}$ *a felületi egységnormális és* $\mathbf{n}$ *a görbe főnormálisa.*

**Bizonyítás.** A felületi görbét ívhossz szerint deriválva kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}' &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = (\mathbf{r}_u\dot{u} + \mathbf{r}_v\dot{v})\frac{dt}{ds} \\ \mathbf{g}'' &= \left[\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}\dot{v}^2\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + a\mathbf{r}_u + b\mathbf{r}_v \end{aligned}$$

ahol $a$ és $b$ skalár függvények (amelyek pontos kiszámítására nem lesz szükségünk). Az $\mathbf{e}' = \kappa\mathbf{n}$ Frenet-képlet szerint az $\mathbf{m}$ egységnormálissal való szorzás után kapjuk:

$$\langle \mathbf{e}', \mathbf{m} \rangle = \kappa \langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \rangle = \left(L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2.$$

Ebből és a

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2$$

összefüggésből adódik az állítás. ■

**2.3.20. Következmény.** *Az előjelezett normálgörbület értéke*

$$\kappa_n = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

**2.3.21. Tétel. (Meusnier tétele)** *A felületet előállító $\mathbf{r}(u,v)$ függvény legyen kétszer folytonosan differenciálható s legyen ez igaz a felület $\mathbf{P}_0$ pontján áthaladó $\mathbf{R}(t)$ felületi görbére is. E felületi görbe $\mathbf{P}_0$ pontbeli $\kappa$ görbülete, ill. $\rho$ görbületi sugara, valamint a felületi görbe érintőirányához tartozó normálmetszet $\kappa_n$ görbülete, ill. $\rho_n$ görbületi sugara közötti összefüggés*

$$\kappa = \frac{\kappa_n}{\cos\alpha}, \qquad \textit{ill.} \qquad \rho = \rho_n \cos\beta$$

*alakban írható fel, ahol $\alpha$ a felület $\mathbf{P}_0$ pontjában a felületi normális egységvektora és a felületi görbe $\mathbf{n}$ főnormális egységvektora közötti szög, $\beta$ pedig a $\mathbf{P}_0$ pontbeli felületi normális egyenes és a felületi görbe főnormális egyenese által meghatározott hegyesszög.* ∎

**2.3.22. Tétel.** *A főgörbületeket az alábbi egyenlet*

$$\begin{vmatrix} L-\kappa_i E & M-\kappa_i F \\ M-\kappa_i F & N-\kappa_i G \end{vmatrix} = 0, \tag{2.1}$$

*a főirányokat pedig a*

$$\begin{aligned} (L-\kappa_i E)\dot{u}_i + (M-\kappa_i F)\dot{v}_i &= 0 \\ (M-\kappa_i F)\dot{u}_i + (N-\kappa_i G)\dot{v}_i &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

*homogén egyenlet rendszer határozza meg.*

**Bizonyítás.** Mint láttuk, a $\mathbf{c} = (\dot{u}, \dot{v})$ irányhoz tartozó normálgörbület értéke

$$\kappa(\mathbf{c}) = \frac{\mathbf{c}\mathcal{D}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}\mathcal{G}\mathbf{c}^T}.$$

Jelöljük a maximumot, ill. a minimumot $\kappa_1$-gyel, ill. $\kappa_2$-vel. Ekkor a

$$\kappa(\mathbf{c}) - \kappa_i = \frac{\mathbf{c}(\mathcal{D} - \kappa_i\mathcal{G})\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}\mathcal{G}\mathbf{c}^T}$$

függvény $i = 1$ esetén $\geq 0$ és $i = 2$ estén $\leq 0$. Mivel vannak olyan irányok, mikor $\kappa(\mathbf{c}) - \kappa_i = 0$ ezért a $\kappa(\mathbf{c}) - \kappa_i = 0$ függvény szemidefinit. Mivel a nevező pozitiv definit, ezért a számlálóban levő kvadratikus alak is szemidefinit. Ismeretes, hogy ez akkor és csak akkor teljesül, ha a kvadratikus alak diszkriminánsa 0, azaz $|\mathcal{D} - \kappa_i\mathcal{G}| = 0$ ami az állítást adja.

A főirányokat pedig az alábbi módon kaphatjuk meg. Mivel a főirányhoz tartozó $\mathbf{c}$ esetén a

$$\mathbf{c}(\mathcal{D} - \kappa_i\mathcal{G})\mathbf{c}^T$$

kvadratikus alaknak szélsőértéke van, ezért ott a parciális deriváltak zérusok. Deriválás után (2.2)-t kapjuk. Mivel ennek a homogén egyenletrendszernek a determinánsa nulla, ezért létezik nemtriviális megoldás. ∎

**2.3.23. Tétel.** *A főgörbületek értéke és a főirányok függetlenek a paraméterezéstől.*

**Bizonyítás.** Legyen $\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r}(u(s,t), v(s,t))$. A láncszabály segítségével kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= u_s\mathbf{r}_u + v_s\mathbf{r}_v, \\ \mathbf{R}_t &= u_t\mathbf{r}_u + v_t\mathbf{r}_v, \\ \mathbf{R}_{ss} &= u_s^2\mathbf{r}_{uu} + 2u_s v_s\mathbf{r}_{uv} + v_s^2\mathbf{r}_{vv} + u_{ss}\mathbf{r}_u + v_{ss}\mathbf{r}_v, \\ \mathbf{R}_{st} &= u_s u_t\mathbf{r}_{uu} + (u_s v_t + u_t v_s)\mathbf{r}_{uv} + v_s v_t\mathbf{r}_{vv} + u_{st}\mathbf{r}_u + v_{st}\mathbf{r}_v, \\ \mathbf{R}_{tt} &= u_t^2\mathbf{r}_{uu} + 2u_t v_t\mathbf{r}_{uv} + v_t^2\mathbf{r}_{vv} + u_{tt}\mathbf{r}_u + v_{tt}\mathbf{r}_v. \end{aligned}$$

Vezessük be a

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} u_s & v_s \\ u_t & v_t \end{pmatrix}$$

jelölést. Ha $\mathcal{G}_{\mathbf{r}}$, $\mathcal{G}_{\mathbf{R}}$, $\mathcal{D}_{\mathbf{r}}$ és $\mathcal{D}_{\mathbf{R}}$ jelöli az $\mathbf{r}$ ill. $\mathbf{R}$-hez tartozó első és második alapmátrixokat, akkor egyrészt $\mathcal{G}_{\mathbf{R}} = \mathcal{T}\mathcal{G}_{\mathbf{r}}\mathcal{T}^T$ és $\mathcal{D}_{\mathbf{R}} = \mathcal{T}\mathcal{D}_{\mathbf{r}}\mathcal{T}^T$, másrészt

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathbf{R}}(\mathbf{c}) &= \frac{\mathbf{c}\mathcal{D}_{\mathbf{R}}\mathbf{c}^t}{\mathbf{c}\mathcal{G}_{\mathbf{R}}\mathbf{c}^t} \\
&= \frac{\mathbf{c}\mathcal{T}\mathcal{D}_{\mathbf{r}}\mathcal{T}^T\mathbf{c}^t}{\mathbf{c}\mathcal{T}\mathcal{G}_{\mathbf{r}}\mathcal{T}^T\mathbf{c}^t} \\
&= \kappa_{\mathbf{r}}(\mathbf{c}\mathcal{T}),
\end{aligned}$$

amiből már következik az állítás. ■

**2.3.24. Tétel.** *Ha $\kappa_1 \neq \kappa_2$, akkor a főirányok merőlegesek egymásra.*

**Bizonyítás.** A főirányokhoz tartozó paraméterek legyenek: $(\dot{u}_1, \dot{v}_1)$ és $(\dot{u}_2, \dot{v}_2)$. Ekkor

$$\langle \mathbf{r}_u\dot{u}_1 + \mathbf{r}_v\dot{v}_1, \mathbf{r}_u\dot{u}_2 + \mathbf{r}_v\dot{v}_2 \rangle = E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2.$$

Most tekintsük a következő kifejezést:

$$\begin{aligned}
&\kappa_1\left[E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2\right] = \\
&\kappa_1\left[(E\dot{u}_1 + F\dot{v}_1)\dot{u}_2 + (F\dot{u}_1 + G\dot{v}_1)\dot{v}_2\right] = \\
&(L\dot{u}_1 + M\dot{v}_1)\dot{u}_2 + (M\dot{u}_1 + N\dot{v}_1)\dot{v}_2 = \\
&(L\dot{u}_2 + M\dot{v}_2)\dot{u}_1 + (M\dot{u}_2 + N\dot{v}_2)\dot{v}_1 = \\
&\kappa_2\left[E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2\right].
\end{aligned}$$

Mivel $\kappa_1 \neq \kappa_2$, ez csak akkor teljesülhet, ha $E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1) + G\dot{v}_1\dot{v}_2 = 0$, azaz a főirányok merőlegesek egymásra. ■

**2.3.25. Definíció.** *Ha egy pontban $\kappa_1 = \kappa_2$, azaz minden főgörbület egyforma nagyságú, akkor ezt a pontot* **umbilikusnak** *nevezzük.*

**2.3.26. Definíció.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \kappa_1\kappa_2 && \textit{Gauss görbület} \\
\mathcal{H} &= \kappa_1 + \kappa_2 && \textit{Minkowski (összeg) görbület}
\end{aligned}$$

**2.3.27. Tétel.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \\
\mathcal{H} &= \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

**Bizonyítás.** Közvetlenül következik 2.1-ből. ■

**2.3.28. Definíció.** *Egy pont* **elliptikus,** *ha $\mathcal{K} > 0$,* **hiperbolikus,** *ha $\mathcal{K} < 0$ és* **parabolikus,** *ha $\mathcal{K} = 0$.*

**2.3.29. Tétel. (Euler tétele)** *Tetszőleges felületi pontban bármely normálmetszet $\kappa_n$ görbülete kifejezhető a főnormális-görbületekkel; az összefüggés:*

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\theta + \kappa_2 \sin^2\theta$$

*ahol $\theta$ a görbeérintő és a $\kappa_1$nek megfelelő főgörbületi irány bezárta szög.*

**Bizonyítás.** Keressünk egy olyan átparaméterezést, ahol a paramétervonalak a főirányok mentén haladnak. A (2.3) és (2.3.23) Tételek jelöléseit használva legyen

$$u(\xi,\eta)=\lambda\dot u_1\xi+\mu\dot u_2\eta \qquad v(\xi,\eta)=\lambda\dot v_1\xi+\mu\dot v_2\eta$$

ahol

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf r}\dot u_1^2+2F_{\mathbf r}\dot u_1\dot v_1+G_{\mathbf r}\dot v_1^2}} \qquad \mu=\frac{1}{\sqrt{E_{\mathbf r}\dot u_2^2+2F_{\mathbf r}\dot u_2\dot v_2+G_{\mathbf r}\dot v_2^2}}.$$

Ekkor nyilván $E_{\mathbf R}=1$, $F_{\mathbf R}=0$ és $G_{\mathbf R}=1$ lesz. Megmutatjuk, hogy $M_{\mathbf R}=0$. Ha $\mathbf m$ jelöli a felületi egységnormálist, akkor

$$\begin{aligned} M_{\mathbf R}&=\langle \mathbf R_{\xi\eta},\mathbf m\rangle\\ &=u_\xi u_\eta L_{\mathbf r}+(u_\xi v_\eta+u_\eta v_\xi)M_{\mathbf r}+v_\xi v_\eta N_{\mathbf r}\\ &=\lambda\mu\left(\dot u_1\dot u_2L_{\mathbf r}+(\dot u_1\dot v_2+\dot u_2\dot v_1)M_{\mathbf r}+\dot v_1\dot v_2N_{\mathbf r}\right),\end{aligned}$$

amiről a (2.3.23) Tétel bizonyításában már láttuk, hogy nulla.

Így az $E_{\mathbf R}$, $F_{\mathbf R}$, $G_{\mathbf R}$ és $M_{\mathbf R}$ alapmennyiségekre kapott értékek alapján

$$\kappa_n=\frac{L_{\mathbf R}\dot\xi^2+N_{\mathbf R}\dot\eta^2}{\dot\xi^2+\dot\eta^2}=\kappa_1\frac{\dot\xi^2}{\dot\xi^2+\dot\eta^2}+\kappa_2\frac{\dot\eta^2}{\dot\xi^2+\dot\eta^2}.$$

Ha $\theta$ a görbeérintő és a főgörbületi irány bezárta szög, akkor

$$\frac{\dot\xi^2}{\dot\xi^2+\dot\eta^2}=\cos^2\theta \qquad \frac{\dot\eta^2}{\dot\xi^2+\dot\eta^2}=\sin^2\theta.$$

■

Tekinsük az oszkuláló paraboloidnak az érintősíkkal párhuzamos, attól $\pm\frac{1}{2}$ távolságban levő síkokkal való metszeteit:

**2.3.30. Definíció. Dupin indikatrix:**

$$L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2=\pm1.$$

**Megjegyzés.** Ha a paraméterezés olyan, mint amilyent az Euler tétel bizonyításában használtunk, akkor az indikatrix egyenlete:

$$\kappa_1\xi^2+\kappa_2\eta^2=\pm1.$$

Nyilván, ha $\mathcal K>0$, akkor ellipszist, ha $\mathcal K<0$, akkor hiperbolát, ha pedig $\mathcal K=0$, akkor párhuzamos egyenespárt kapunk.

**2.3.31. Tétel.** *Az érintősíkban az adott (azaz $\kappa_n$-hez tartozó) irányban felvéve a $\sqrt{|\rho_n|}=\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}$ távolságot, éppen a Dupin indikatrixot kapjuk.*

**Bizonyítás.** Használjuk megint a főgörbület menti parméterezést. A $\theta$ irányban az érintősíkban $\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}$-t felmérve a kapott pont koordinátái $\xi=\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}\cos\theta$ és $\eta=\frac{1}{\sqrt{|\kappa_n|}}\sin\theta$ lesznek. Bebizonyítjuk, hogy $(\xi,\eta)$ kielégíti a Dupin indikatrix egyenletét:

$$\kappa_1\xi^2+\kappa_2\eta^2=\frac{\kappa_1}{|\kappa_n|}\cos^2\theta+\frac{\kappa_2}{|\kappa_n|}\sin^2\theta=\frac{1}{|\kappa_n|}(\kappa_1\cos^2\theta+\kappa_2\sin^2\theta)=\pm1,$$

ahol az Euler-tételt használtuk. ■

## Geometriai folytonosság

**2.3.32. Definíció.** *Legyen* $\mathbf{p} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *és* $\mathbf{q} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *két* $C^k$ *elemi felület. Azt mondjuk, hogy* $\mathbf{p}$ *és* $\mathbf{q}$ $G^k$*-rendben kapcsolódik egymáshoz, ha létezik egy* $\Phi = (\varphi, \psi) : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *úgy, hogy* $\Phi$ *egy* $C^k$ *diffeomorfizmus, azaz* $k-$*szor mindkét irányban folytonosan differenciálható leképezés,*

$$\Phi(0, v) = (1, v),$$

*az egységnégyzet belsejét az egységnégyzet külsejébe viszi és*

$$\left.\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j}\mathbf{q}\right|_{(0,v)} = \left.\frac{\partial^{i+j}}{\partial u^i \partial v^j}\mathbf{p}(\varphi, \psi)\right|_{(0,v)} \qquad (0 \le i, j;\, i + j \le k).$$

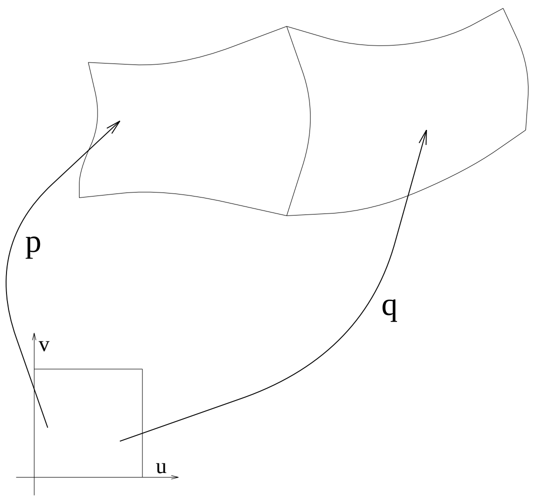


Figure 2.2: **p** és **q** felületek kapcsolódása

**2.3.33. Tétel.** *Az előző definícióban az utolsó feltétel helyettesíthető az alábbival:*

$$\left.\frac{\partial^{i}}{\partial u^i}\mathbf{q}\right|_{(0,v)} = \left.\frac{\partial^{i}}{\partial u^i}\mathbf{p}(\varphi, \psi)\right|_{(0,v)} \qquad (0 \le i \le k).$$

■

**2.3.34. Példa.** $G^1$ *feltétel:*

$$\mathbf{q}_u(0, v) = \varphi_u(0, v)\mathbf{p}_u(1, v) + \psi_u(0, v)\mathbf{p}_v(1, v).$$

**2.3.35. Tétel.** *A* $G^1$ *feltétel ekvivalens azzal, hogy az érintősíkok folytonosak.*

**Bizonyítás.** Ha a feltétel teljesül, akkor a felületek parciális deriváltjai egymás lineáris kombinációi, így az érintősíkok megegyeznek. Ha pedig az érintősíkok megegyeznek, akkor léteznek olyan $\alpha_1(v)$, $\beta_1(v)$ függvények, hogy

$$\mathbf{q}_u(0, v) = \alpha_1(v)\mathbf{p}_u(1, v) + \beta_1(v)\mathbf{p}_v(1, v).$$

Most a

$$\varphi(u, v) = 1 + u\alpha_1(v)$$
$$\psi(u, v) = v + u\beta_1(v)$$

választással a $G^1$ feltétel teljesül. ■

**2.3.36. Példa.** *$G^2$ feltétel: a $G^1$ feltétel és*

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{uu}(0,v) =&\varphi_u^2(0,v)\mathbf{p}_{uu}(1,v) + 2\varphi_u(0,v)\psi_u(0,v)\mathbf{p}_{uv}(1,v) + \psi_u^2(0,v)\mathbf{p}_{vv}(1,v) + \\ &\varphi_{uu}(0,v)\mathbf{p}_u(1,v) + \psi_{uu}(0,v)\mathbf{p}_v(1,v)\end{aligned}$$

**2.3.37. Tétel. (Kahmann tétele)** *A $G^2$ feltétel ekvivalens azzal, hogy* $\mathbf{p}$ *és* $\mathbf{q}$ *görbület-folytonosan kapcsolódnak egymáshoz.*

**Megjegyzés.** A Tételt először Kahmann mondta ki ([Kah83]). Mi a bizonyításban Herront követjük ([Her87]).

**Bizonyítás.** Ha a $G^2$ feltétel teljesül, akkor az azt jelenti, hogy a $\mathbf{p}$ felület (lokálisan) átparaméterezhető úgy, hogy az összes első és másodrendű parciális deriváltja a közös határ mentén megegyezzen a $\mathbf{q}$ felületével. Mivel a görbületi viszonyok csak ezektől függenek, így ekkor a felületek görbület-folytonosak lesznek.

Ha a felületek görbületfolytonosak, akkor először is természetesen teljesül a $G^1$ feltétel. Most legyen a reparametrizáló leképezésünk a következő:

$$\begin{aligned}\varphi(u,v) &= 1 + u\alpha_1(v) + \frac{u^2}{2}\alpha_2(v)\\ \psi(u,v) &= v + u\beta_1(v) + \frac{u^2}{2}\beta_2(v)\end{aligned}$$

ahol $\alpha_2(v)$-t és $\beta_2(v)$ később fogjuk definiálni, és használjuk a $\mathbf{P}(u,v) = \mathbf{p}(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ jelölést. Tekintsük $\mathbf{q}(u,v)$-t és $\mathbf{P}(u,v)$-t mint görbéket $u$-ban. A láncszabály alapján

$$\mathbf{P}_u(1,v) = \alpha_1(v)\mathbf{p}_u(1,v) + \beta_1(v)\mathbf{p}_v(1,v) = \mathbf{q}_u(0,v)$$

azaz a görbék párhuzamosak egymással. Nyilván

$$\mathbf{P}_{uu}(1,v) = \alpha_1^2(v)\mathbf{p}_{uu}(1,v) + 2\alpha_1(v)\beta_1(v)\mathbf{p}_{uv}(1,v) + \beta_1^2(v)\mathbf{p}_{vv}(1,v) + \alpha_2(v)\mathbf{p}_u(1,v) + \beta_2(v)\mathbf{p}_v(1,v).$$

Azt szeretnénk belátni, hogy $\alpha_2$ és $\beta_2$ választható úgy, hogy

$$\mathbf{P}_{uu}(1,v) = \mathbf{q}_{uu}(0,v)$$

legyen.

Ha a (közös) görbeirányhoz tartozó normálgörbületet $\kappa_n(v)$-vel és a normálist pedig $\mathbf{N}(v)$-vel jelöljük, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_{uu}(0,v) &= \mathbf{q}_u(0,v)^2\kappa_n(v)\mathbf{N}(v) + a_1(v)\mathbf{p}_u(1,v) + b_1(v)\mathbf{p}_v(1,v),\\ \mathbf{P}_{uu}(1,v) &= \mathbf{P}_u(1,v)^2\kappa_n(v)\mathbf{N}(v) + a_2(v)\mathbf{p}_u(1,v) + b_2(v)\mathbf{p}_v(1,v),\end{aligned}$$

ahol $a_1$, $b_1$, $a_2$ és $b_2$ valamilyen $C^2$ függvények. Mivel $\mathbf{P}_u(1,v) = \mathbf{q}_u(0,v)$, ezért a fenti kifejezésekben a normális irányú komponensek megegyeznek, az érintősíkba eső részeket pedig $\alpha_2$ és $\beta_2$ alkalmas választásával egyenlővé lehet tenni. ∎

# Fejezet 3

# Bézier görbék és felületek

A következőkben olyan $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ térgörbékkel fogunk foglalkozni, ahol $p_1$, $p_2$ és $p_3$ polinomok. Előtte azonban a polinomiális interpoláció néhány alapkérdését tekintjük át.

## 3.1 Polinomiális interpoláció

### 3.1.1 Lagrange interpoláció

A Lagrange interpoláció alapfeladata a következő. Adott $n+1$ tetszőleges valós szám: $p_0, \ldots, p_n$, és $n+1$ paraméter érték:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n.$$

Határozzuk meg azt az $L(t)$ legfeljebb $n$-edfokú polinomot, melyre

$$L(t_k) = p_k \qquad (0 \leq k \leq n).$$

**3.1.1. Tétel.** *A fenti feladatnak pontosan egy megoldása van.*

**Bizonyítás.** Először belátjuk, hogy legfeljebb egy megoldás létezik. Tegyük fel, hogy mind $L$, mind $M$ is megoldás azaz $L$ és $M$ legfeljebb $n$-edfokú polinomok és

$$L(t_k) = p_k = M(t_k) \qquad (0 \leq k \leq n).$$

Így a $Q(t) = L(t) - M(t)$ legfeljebb $n$-edfokú polinomnak $n+1$ gyöke van. Az algebra alaptétele szerint $Q = 0$ azaz $L = M$.

Most megmutatjuk, hogy létezik megoldás. Használjuk a következő jelöléseket:

$$\Omega(t) = (t - t_0) \cdot \cdots \cdot (t - t_n),$$
$$l_k(t) = \frac{\Omega(t)}{(t - t_k)\Omega'(t_k)} = \prod_{i \neq k} \frac{t - t_i}{t_k - t_i}.$$

Nyilván $l_k(t)$ egy $n$-edfokú polinom és teljesül, hogy

$$l_k(t_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } j = k, \\ 0 & \text{ha } j \neq k. \end{cases}$$

Így

$$L(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k l_k(t)$$

egy (azaz a) megoldása az interpolációs feladatnak. ■

**Megjegyzés.** Ha az alapfeladatot úgy módosítjuk, hogy a $p_k$ valós számok helyett $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^3$ pontokat írunk elő, akkor $\mathbf{L}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}_k l_k(t)$ egy interpoláló polinomiális, parametrikus görbe lesz azaz olyan, a koordinátáiban polinomokból álló parametrikus görbét kapunk, amely a $t_k$ pontban $\mathbf{P}_k$-n halad át.

**Megjegyzés.** A gyakorlatban sokszor csak egy pontsorozat adott, és a paraméterek nem. A paraméterek jó választása nehéz feladat, a keletkező görbe sokszor nem kívánt hullámzást mutat, ezért ezt a módszert csak ritkán használják.

### 3.1.2 Hermite interpoláció

Ennél a feladatnál a polinomnak nem csak az értékeit, de a deriváltját is előírjuk.

Legyen adott $r+1$ paraméter érték:

$$t_0 < \cdots < t_r,$$

$r+1$ természetes szám: $m_0, \ldots, m_r$, valamint $n+1 := \sum_{i=0}^{r} m_i$ derivált érték:

$$c_{ij} \qquad (0 \leq j < m_i,\, 0 \leq i \leq r).$$

Keressük azt a $H(t)$ $n$-edfokú polinomot, melyre

$$H^{(j)}(t_i) = c_{ij} \qquad (0 \leq j < m_i,\, 0 \leq i \leq r).$$

**3.1.2. Tétel.** *A fenti interpolációs problémának pontosan egy megoldása van.*

**Bizonyítás.** Ha a $H(t)$ együtthatóit $a_i$-vel jelöljük, azaz

$$H(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i,$$

akkor azt kell megmutatnunk, hogy a

$$H^{(j)}(t_i) = a_j + a_{j+1} t_i + \cdots + a_n \frac{t_i^{n-j}}{(n-j)!} = c_{ij} \qquad (0 \leq j < m_i,\, 0 \leq i \leq r)$$

lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Ha minden $c_{ij}$ nulla, akkor $H$-nak $n+1$ gyöke lesz, így $H = 0$. Ebből következik, hogy az egyenletrendszer determinánsa nem nulla, azaz pontosan egy megoldás létezik. ∎

A fenti problémának egy más megfogalmazása a következő: Legyen $X : x_0, \ldots, x_n$ az alappontok sorozata, ahol most nem követeljük meg, hogy a pontok különbözőek legyenek. Az $x_j$ pont $m_j$ *multiplicitásának* azon $x_i$-k számát nevezzük, amire $x_j = x_i$. Továbbá jelölje $l_j$ azon $x_i$-k számát amikre $x_j = x_i$ és $i \leq j$. Ezekkel a jelölésekkel az Hermite interpolációs feladat a következő. Határozzuk meg egy adott $c_j$ sorozat esetén azt a $P_n(x)$ $n$-edfokú polinomot, melyre

$$P_n^{(l_j-1)}(x_j) = c_j, \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Ennek a feladatnak a Newton-ra visszamenő megoldása a következő

**3.1.3. Tétel.** *Léteznek olyan egyértelműen meghatározott $A_0, \ldots, A_n$ konstansok, amikre az alábbi $\{P_j\}$ polinomok*

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= A_0 \\
P_1(x) &= A_0 + A_1(x - x_0) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n(x) &= A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})
\end{aligned} \tag{3.1}$$

*rendre egy-egy olyan Hermite interpolációs probléma megoldásai, ahol az alappontok*

$$X_j = \{x_0, \ldots, x_j\} \qquad (j = 0, \ldots, n)$$

*és az adatpontok $c_0, \ldots, c_n$.*

**Megjegyzés.** Newton módszere lehetőséget ad rá, hogy folyamatosan bővítsük az alappontok számát anélkül, hogy - mint a Lagrange interpoláció esetén - minden formulánkat újra kellene számolnunk.

**Bizonyítás.** A tételt $k$-ra való indukcióval bizonyítjuk. Nyilvánvalóan $P_0(x) = A_0$ egyértelműen meghatározott a $P_n(x_0) = c_0$ feltétel által.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $P_0, \ldots, P_{k-1}$ és $X_0, \ldots, X_{k-1}$ esetén. Most egyrészt a $P_k(x) = P_{k-1}(x) + A_k(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$ polinom tetszőleges $A_k$ esetén teljesíti az $X_{k-1}$-hez tartozó feltételeket, és az új $P_k^{(l_k-1)}(x_k) = c_k$ feltétel pedig egyértelműen meghatározza $A_k$-t. ■

**3.1.4. Jelölés.** *Ha az interpolációs feladatban szereplő $c_k$ konstansok egy $f$ függvénynek az $x_i$ pontokban felvett deriváltjaiból származtak, akkor az interpolációs polinomot $P_n(f, X; x)$-szel vagy röviden $P_n(f; x)$-szel fogjuk jelölni.*

### 3.1.3 Osztott differenciák

A későbbiekben (a B-spline alapfüggvények egy lehetséges definíciójához) szükségünk lesz az ún. **osztott differenciák** fogalmára.

**3.1.5. Definíció.** *Legyen adott egy $f$ függvény és $n + 1$ (nem feltétlenül különböző) valós szám: $x_0, x_1, \ldots, x_n$. A hozzájuk tartozó osztott differencia, amit hagyományosan a*

$$[x_0, \ldots, x_n]f$$

*szimbólummal jelölünk, legyen egyenlő azzal az $A_n$ konstanssal, ami (3.1)-ben található, ahol a $c_j$ adatok az $f$ függvény $f^{(l_j-1)}(x_j)$ deriváltjai.*

**Megjegyzés.** Ez a definíció feltételezi, hogy az adott pontokban az $f$ megfelelő rendű deriváltjai léteznek; $[x_0, \ldots, x_n]f$ ezen deriváltak egy lineáris kombinációja lesz.

Például $[x_0]f = f(x_0)$, továbbá $[x_0, x_1]f = \dfrac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$ ha $x_0 \neq x_1$ és $[x_0, x_0]f = f'(x_0)$, ha a derivált létezik.

Az alábbiakban az osztott differenciák néhány tulajdonságát ismertetjük. A bizonyításuk könnyen következik az interpolációs polinom tulajdonságaiból.

1. $[x_0, \ldots, x_n]f$ szimmetrikus függvénye $x_0, \ldots, x_n$-nak.
2. Ha $f$ egy legfeljebb $n$-edfokú polinom, akkor $[x_0, \ldots, x_n]f$ konstans, és ha a fokszám kisebb mint $n$, akkor ez a konstans 0.
3. Ha $f$ $n$-szer folytonosan differenciálható az $x_0$ pontban, akkor
$$[x_0, \ldots, x_0]f = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \tag{3.2}$$
4. Az interpolációs polinomra vonatkozó Newton formula a következő
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})[x_0, \ldots, x_k]f.$$
Ebből a formulából közvetlenül kapjuk a maradéktagot, ha egy új $y$ pontot iktatunk be:
$$f(y) = P_n(y) + (y - x_0) \ldots (y - x_n)[x_0, \ldots, x_n, y]f.$$
5. Ha $f \in C^n[a, b]$, $a \leq x_i \leq b$ $(i = 0, \ldots, n)$, akkor Rolle tétele segítségével kapjuk, hogy létezik olyan $\xi \in [a, b]$, hogy
$$[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

6. Ha az $f$ függvény megfelelő rendű deriváltjai folytonosak $(x_0,\dots,x_n)$-ben, akkor ugyanott $[x_0,\dots,x_n]f$ is folytonos.

7. Ha $x_0 \neq x_n$, akkor

$$[x_0,\dots,x_n]f = \frac{[x_1,\dots,x_n]f - [x_0,\dots,x_{n-1}]f}{x_n - x_0}. \tag{3.3}$$

**Bizonyítás.** Legyenek $S$ és $T$ $(n-1)$-edfokú polinomok, amelyek $f$-t az $x_0,\dots,x_{n-1}$, ill. $x_1,\dots,x_n$ pontokban interpolálják. Könnyű számolással látható, hogy

$$\frac{x-x_0}{x_n-x_0}T(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}S(x)$$

egy legfeljebb $n$-edfokú polinom, ami az $f$ függvényt az $x_0,\dots,x_n$ pontokban interpolálja. Az interpolációs formulába behelyettesítve az állítás közvetlenül adódik. ■

8. Ha valamennyi $x_i$ különböző, akkor

$$[x_0,\dots,x_n]f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{i\neq k}(x_k - x_i)}.$$

Ez könnyen kiolvasható a Lagrange és a Newton formulák összehasonlításából.

9. **3.1.6. Definíció.** *Az $f$ függvény $h$ lépéshossz szerinti $n$-edik* **differenciáját** *az alábbi rekurzióval definiáljuk:*

$$\begin{aligned} \Delta_h^0 f(x) &:= f(x), \\ \Delta_h f(x) := \Delta_h^1 f(x) &:= f(x+h) - f(x), \\ \Delta_h^n f(x) &:= \Delta_h \Delta_h^{n-1} f(x). \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy egyrészt

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$

másrészt

$$\Delta_h^n f(x) = n! h^n [x, x+h, \dots, x+nh] f.$$

10. Legyen $f$ és $g$ két függvény. Az osztott differenciákra vonatkozó *Leibniz formula*:

$$[x_0,\dots,x_n](gh) = \sum_{k=0}^{n} ([x_0,\dots,x_k]g)([x_k,\dots,x_n]h). \tag{3.4}$$

**Bizonyítás.** Először tekintsük azt az esetet, amikor minden $x_i$ különböző. Ekkor

$$P_n(g,X;x)P_n(h,X;x) = \\ \sum_{k=0}^{n}(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})[x_0,\dots,x_k]g \sum_{l=0}^{n}(x-x_{l+1})\dots(x-x_{k-1})[x_l,\dots,x_k]h,$$

ami az $f = gh$ függvényt az $x_i$ pontokban interpolálja. A fenti szorzatot írjuk fel mint a következő összeget

$$\sum_{k,l=0}^{n} = \sum_{k\leq l} + \sum_{k>l}.$$

A második összeg az $x = x_0, \ldots, x_n$ pontokban eltűnik. Így az első összeg - ami egy legfeljebb $n$-edfokú polinom és amit nevezzünk $Q$-nak - $f$-nek egy interpolációs polinomja lesz, azaz az interpolációs polinomja. Ha összehasonlítjuk $P_n(f, x)$ és $Q$ főegyütthatóit, akkor megkapjuk az állítást.

Az az eset, mikor a gyökök összeeshetnek, a diszkrét esetből folytonosság révén következik. ■

11. Vezessük be az alábbi jelölést:

**3.1.7. Jelölés.** *Az $f(x)$ függvény pozitiv részét a következőképpen definiáljuk:*

$$f(x)_+ = \max\{f(x), 0\}.$$

Például

$$(x-t)_+ = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq t, \\ x-t & \text{ha } x > t. \end{cases}$$

Ezt a függvényt szokás *csonkított hatványfüggvény*nek (*truncated power*) nevezni.

**3.1.8. Jelölés.** *Ha egy $f(u, v)$ kétváltozós függvényre valamilyen operátort alkalmazunk és világossá akarjuk tenni, hogy az operátor melyik változója szerint hat, akkor oda "$\cdot$"-t írunk.*

Például, ha $f(u, v)$ első változója szerinti osztott differenciát vesszük, akkor $[x_0, \ldots, x_n]f(\cdot, v)$ jelölést használjuk.

Ismeretes, hogy egy $f \in C^n[a, b]$ függvényre

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(n)}(t) \frac{(x-t)_+^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

(Maradéktagos Taylor formula.)

Innen és a fentiekből következik, hogy

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \int_a^b f^{(n)}(t)[x_0, \ldots, x_n] \left[ \frac{(\cdot - t)_+^{n-1}}{(n-1)!} \right] dt. \tag{3.5}$$

## 3.2 Vektor polinomok

A polinomok szokásos Taylor sorfejtés szerinti alakja:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{a}_k t^k.$$

Kívánatos lenne egy olyan polinom reprezentáció, amely szimmetrikus a $[0, 1]$-en paraméterezett görbe mindkét végpontjára. Ha $n$ páratlan ($n = 2m + 1$), egy ilyen szimmetrikus reprezentáció az **Hermite alak**:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^{m} \left( \frac{d^k \mathbf{p}(0)}{dt^k} \varphi_{n,k}(t) + \frac{d^k \mathbf{p}(1)}{dt^k} \psi_{n,k}(t) \right)$$

ahol $\varphi_{n,k}$ és $\psi_{n,k}$ olyan $n$-edfokú polinomok, hogy ha $(0 \leq r \leq m)$

$$\varphi_{n,k}^{(r)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } r = k, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad \psi_{n,k}^{(r)}(1) = \begin{cases} 1 & \text{ha } r = k, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\varphi_{n,k}^{(r)}(1) = 0, \qquad \psi_{n,k}^{(r)}(0) = 0.$$

A fenti polinomok explicit alakja:

$$\varphi_{n,k}(t) = \frac{(1-x)^{m+1}}{k!} \sum_{j=k}^{m} \binom{n+j-k}{m} t^j$$
$$\psi_{n,k}(t) = (-1)^k \varphi_{n,k}(1-t)$$

**Megjegyzés.** A Taylor sorfejtéskor a polinom csak egy pontjában vett deriváltjaival van megadva, míg az Hermite reprezentáció esetén a görbe a két végpontjában megadott deriváltakkal van jellemezve.

**Megjegyzés.** A polinomok egyértelmű előállításából következik, hogy az azonosan 1 polinom a következő módon írható fel:

$$\varphi_{n,0}(t) + \psi_{n,0}(t) = 1.$$

Leggyakrabban $n = 3$ esetét használjuk. Ekkor más a szokásos jelölés:

$$\mathbf{p}(t) = f_0(t)\mathbf{p}_0 + f_1(t)\mathbf{p}_1 + g_0(t)\mathbf{t}_0 + g_1(t)\mathbf{t}_1$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}(0) \qquad & \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{t}_0 &= \dot{\mathbf{p}}(0) \qquad & \mathbf{t}_1 &= \dot{\mathbf{p}}(1) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \varphi_{1,0}(t) = (1-t)^2(1+2t) \qquad & f_1(t) &= \varphi_{1,1}(t) = f_0(1-t) \\ g_0(t) &= \psi_{1,0}(t) = t(1-t)^2 \qquad & g_1(t) &= \psi_{1,1}(t) = -\, g_0(1-t) \end{aligned}$$

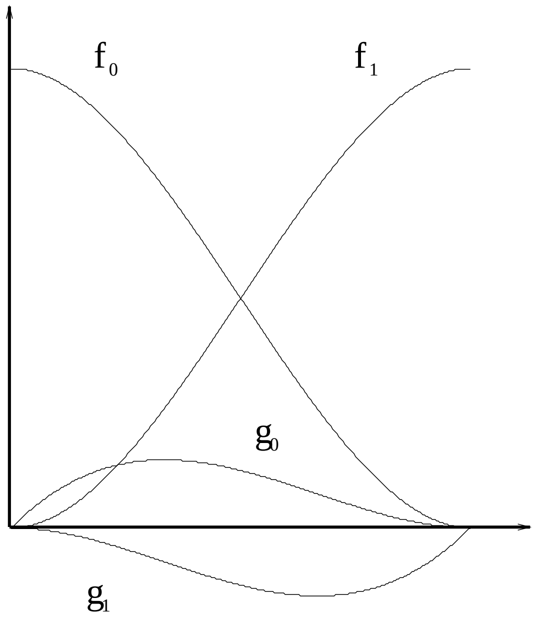


Figure 3.1: Harmadfokú Hermite alappolinomok

**3.2.1. Definíció.** *A* $\mathbf{c}_k \in \mathbb{R}^3$ *együtthatókhoz (az ún. Bézier* **kontrollpontok***hoz) tartozó* **Bézier görbé***nek nevezzük az alábbi polinomot:*

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k b_{n,k}(t)$$

*ahol*

$$b_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

*az ún.* **Bernstein alappolinom***ok.*

*A kontrollpontok által meghatározott poligont* **kontrollpoligon***nak hívjuk.*

**Megjegyzés.** A Bernstein alappolinomok definiciójában szereplő $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatókra (és így a Bernstein alappolinomokra is) a következő konvenció szokásos. Ha $k < 0$ vagy $k > n$, akkor $\binom{n}{k} = 0$ és $b_{n,k}(t) = 0$.

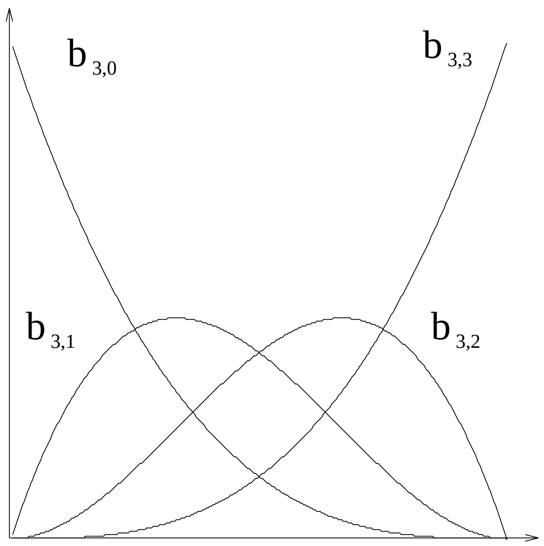


Figure 3.2: Harmadfokú Bernstein alappolinomok

## 3.3 A Bernstein alappolinomok tulajdonságai

Az alappolinomok bázist alkotnak, azaz tetszőleges legfeljebb $n$-ed fokú polinom egyértelműen felírható mint az ($n$-ed fokú) alappolinomok lineáris kombinációja. (Ez nyilvánvaló lesz a későbbiekben, mikor ténylegesen megadjuk egy tetszőleges polinom Bézier előállítását.) Az alábbi formulák a definíció alapján könnyen igazolhatóak:

$$
\begin{aligned}
& b_{n,k}(t) \geq 0 \qquad t \in [0,1], \\
& \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t) = 1, \\
& b_{n,k}(t) = b_{n,n-k}(1-t), \\
& b_{n,k}(0) = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0, \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases} \\
& b_{n,k}(t) = \begin{cases} & \text{monoton nő, ha } t \in [0, \frac{k}{n}], \\ & \text{monoton csökken, ha } t \in [\frac{k}{n}, 1], \end{cases} \\
& \frac{d}{dt} b_{n,k}(t) = n \left[ b_{n-1,k-1}(t) - b_{n-1,k}(t) \right], \\
& b_{n,k}(t) = (1-t) b_{n-1,k} + t b_{n-1,k-1}(t), \\
& \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} b_{n,k}(t) = t, \\
& \sum_{k=0}^{n} \left( \frac{k}{n} \right)^2 b_{n,k}(t) = t^2 + \frac{t(1-t)}{n}, \\
& \int_0^1 b_{n,k}(t) dt = \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

## 3.4 A Bézier görbék tulajdonságai

A

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k b_{n,k}(t)$$

Bézier görbére igazak a következőek:

- Affin invariancia: A görbe affin transzformáltja megegyezik a kontrollpontok affin transzformáltjához tartozó görbével.
- Konvex burok tulajdonság: A kontrollpontok konvex burka tartalmazza a görbét.
- Végponti interpoláció: $\mathbf{p}(0) = \mathbf{c}_0$ és $\mathbf{p}(1) = \mathbf{c}_n$.
- Végponti tangens: A végpontban a görbe a kontrollpoligonhoz simul: $\dot{\mathbf{p}}(0) = n(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0)$ (lásd később).
- Szimmetria: $\sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k b_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_{n-k} b_{n,n-k}(1-t)$.
- Egyenes reprodukció: $\mathbf{a}(1-t) + t\mathbf{b} = \sum_{k=0}^{n} \left( \mathbf{a}(1 - \frac{k}{n}) + \mathbf{b}\frac{k}{n} \right) b_{n,k}(t)$.
- Pszeudo lokális kontroll: Az i-edik kontrollpont megváltoztatása legerősebben a görbe $\frac{i}{n}$ pontjában jelentkezik.
- Változást csökkentő tulajdonság (ld. később).
- Stabilitás: Ha a $\mathbf{p}(t)$ görbe minden Bézier kontrollpontjának legfeljebb $\epsilon$ hibája van, akkor a görbe tetszőleges pontjában a hiba legfeljebb $\epsilon$.

## 3.5 Polinomok sűrűsége a görbék között

**3.5.1. Tétel. (Weierstrass)** *Minden, az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény előáll egy alkalmas polinomsorozat határértékeként.*

**3.5.2. Definíció.** *Ha $f \in C[0, 1]$, akkor az $f$-hez tartozó $n-$edfokú* **Bernstein-polinom** *a következő:*

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x).$$

**3.5.3. Tétel. (Bernstein)**

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} B_n(f; x).$$

**Bizonyítás.** Legyen $f_i(x) = x^i$. Ekkor

$$\begin{aligned} B_n(f_0; x) &= 1 \\ B_n(f_1; x) &= x \\ B_n(f_2; x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

Legyen $\epsilon$ tetszőleges kicsi pozitív szám. Legyen $\delta$ akkora, hogy $|f(x) - f(y)| \le \epsilon$, ha $|x - y| \le \delta$. Így, ha $|x - y| \le \delta$, akkor

$$-\epsilon \le f(x) - f(y) \le \epsilon,$$

ha pedig $|x - y| \ge \delta$, akkor triviális módon

$$-2\|f\|\frac{(x-y)^2}{\delta^2} \le f(x) - f(y) \le 2\|f\|\frac{(x-y)^2}{\delta^2},$$

ahol $\|f\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Ebből következik, hogy tetszőleges $x, y$ számpárra teljesül, hogy

$$-\epsilon - 2\|f\|\frac{(x-y)^2}{\delta^2} \le f(x) - f(y) \le \epsilon + 2\|f\|\frac{(x-y)^2}{\delta^2}.$$

$y$ helyére $k/n$-et írva, megszorozva $b_{n,k}(x)$-el és $k$-ra összegezve kapjuk:

$$-\epsilon - 2\frac{\|f\|}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n} \le f(x) - B_n(f, x) \le \epsilon + 2\frac{\|f\|}{\delta^2}\frac{x(1-x)}{n},$$

ahonnan az állítás már következik. ■

**Megjegyzés.** A Bernstein polinom konstrukciójának valószinűségszámítási gyökerei vannak: az alappolinomok a binomiális eloszlásból származnak. Bézier más meggondolás alapján (és más formalizmussal) vezette be a róla elnevezett polinomokat. Az alappolinomok azonosságát Forrest állapította meg először.

## 3.6 Bézier görbe deriváltjai

**3.6.1. Jelölés. (Hosaka féle operátor jelölés)**

$$\mathbf{p}(t) = (1 - t + tE)^n \mathbf{c}_0 = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{c}_i b_{n,i}(t),$$

*ahol*

$$E\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_{i+1}, \qquad E^m E^n = E^{m+n}, \qquad Et = tE, \qquad E^0 = I,$$

*ahol $I$ az identitás operátor.*

**3.6.2. Jelölés. (Differencia operátor)**

$$\begin{aligned}\Delta^1 \mathbf{c}_j &= \Delta \mathbf{c}_j = \mathbf{c}_{j+1} - \mathbf{c}_j = (E - I)\mathbf{c}_j \\ \Delta^{k+1} \mathbf{c}_j &= \Delta^k \mathbf{c}_{j+1} - \Delta^k \mathbf{c}_j = (E - I)^{k+1} \mathbf{c}_j.\end{aligned}$$

**3.6.3. Tétel.**

$$\frac{d^r \mathbf{p}(t)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{c}_j b_{n-r,j}(t).$$

**Bizonyítás.**

$$\begin{aligned}\frac{d^r \mathbf{p}(t)}{dt^r} &= \frac{n!}{(n-r)!}(1 - t + tE)^{n-r}(E-1)^r \mathbf{c}_0 \\ &= \frac{n!}{(n-r)!}(1 - t + tE)^{n-r} \Delta^r \mathbf{c}_0.\end{aligned}$$

■

**3.6.4. Következmény.**

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{c}_{j+1} - \mathbf{c}_j)\, b_{n-1,j}(t)$$

**3.6.5. Következmény.**

$$\frac{d^r \mathbf{p}(0)}{dt^r} = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{c}_0$$

Vegyük a polinom Taylor sorfejtését:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \sum_{r=0}^{n} \frac{d^r \mathbf{p}(0)}{dt^r} \frac{t^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \Delta^r \mathbf{c}_0 t^r \\ &=: \sum_{r=0}^{n} \mathbf{a}_r t^r.\end{aligned}$$

Speciálisan:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}(0) &= n(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0) \\ \ddot{\mathbf{p}}(0) &= n(n-1)(\mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0).\end{aligned}$$

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy az első $r$ Taylor együttható csak az első $r$ Bézier együtthatótól függ.

**3.6.6. Tétel.** *Az inverz formula a következő:*

$$\mathbf{c}_r = \sum_{i=0}^{r} \frac{\binom{r}{i}}{\binom{n}{i}} \mathbf{a}_i.$$

**Bizonyítás.** Nyilván elegendő belátni, hogy $\mathbf{p}(t) = \sum_{r=0}^{n} \mathbf{c}_r b_{n,r}(t)$. Most

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n} \mathbf{c}_r b_{n,r}(t) &= \sum_{r=0}^{n} \sum_{i=0}^{r} \frac{\binom{r}{i}}{\binom{n}{i}} \mathbf{a}_i b_{n,r}(t) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \sum_{r=i}^{n} \frac{\binom{r}{i}}{\binom{n}{i}} \binom{n}{r} t^r (1-t)^{n-r} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \sum_{r=i}^{n} \binom{n-i}{r-i} t^r (1-t)^{n-r} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \sum_{r=0}^{n-i} \binom{n-i}{r} t^{r+i} (1-t)^{n-i-r} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i t^i \left(t + (1-t)\right)^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i t^i
\end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk. ■

**3.6.7. Következmény.** *A fenti képlet segítségével minden Taylor alakban megadott $n$-edfokú polinom felírható Bézier alakban. Ez mutatja, hogy a Bernstein polinomok tényleg bázist alkotnak.*

**3.6.8. Algoritmus. (de Casteljau algoritmus)** *Legyenek adottak a $\mathbf{c}_0, \ldots, \mathbf{c}_n$ kontrollpontok és $t \in [0,1]$. Ekkor*

$$\mathbf{c}_i^r(t) := (1-t)\mathbf{c}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{c}_{i+1}^{r-1}(t) \qquad (i = 0, \ldots, n-r; \quad r = 1, \ldots, n)$$

*ahol $\mathbf{c}_i^0(t) := \mathbf{c}_i$.*

**3.6.9. Tétel.**

$$\mathbf{c}_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} \mathbf{c}_{i+j} b_{r,j}(t)$$

**Bizonyítás.** $r$-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $r = 0$, akkor triviális. Tegyük fel, hogy $r-1$-re igaz. Így

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_i^r(t) &= (1-t)\mathbf{c}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{c}_{i+1}^{r-1}(t) \\
&= (1-t)\sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{c}_{i+j} b_{r-1,j}(t) + t\sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{c}_{i+j+1} b_{r-1,j}(t) \\
&= \sum_{j=0}^{r} \mathbf{c}_{i+j} \left[(1-t) b_{r-1,j}(t) + t b_{r-1,j-1}(t)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{r} \mathbf{c}_{i+j} b_{r,j}(t).
\end{aligned}$$

■

**3.6.10. Következmény.** $\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}_0^n(t)$, *azaz a de Casteljau algoritmus előállítja a Bézier görbét.*

**3.6.11. Tétel.**

$$\mathbf{p}^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \mathbf{c}_0^{n-r}(t).$$

**Bizonyítás.** Közvetlenül következik az előző következményből és a 3.6.3. Tételből. ■

**3.6.12. Tétel.** **(Szubdivizió)** *Legyen $s \in (0,1)$. Ekkor a $\mathbf{p}(t)$ Bézier görbe $[0,s]$-en való Bézier előállításában a kontrollpontok a $\mathbf{c}_0^k(s)$ de Casteljau pontok, azaz*

$$\mathbf{p}(st) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_0^k(s) b_{n,k}(t).$$

**Bizonyítás.**

$$\mathbf{c}_0^k(s) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{c}_j b_{k,j}(s) = (I - s + sE)^k \mathbf{c}_0,$$

így

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_0^k(s) b_{n,k}(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 - s + sE)^k t^k (1-t)^{n-k} \mathbf{c}_0 \\ &= (I - t + t(1 - s + sE))^n \mathbf{c}_0 \\ &= (I - st + stE)^n \mathbf{c}_0 \\ &= \mathbf{p}(st).\end{aligned}$$

■

## 3.7 Fokszámnövelés

Állítsunk elő egy Bézier görbét egy eggyel magasabb fokú Bernstein bázisban:

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k b_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n+1} \hat{\mathbf{c}}_k b_{n+1,k}(t).$$

**3.7.1. Tétel.**

$$\hat{\mathbf{c}}_j = \frac{j}{n+1} \mathbf{c}_{j-1} + (1 - \frac{j}{n+1}) \mathbf{c}_j,$$

*és $r$-szer ismételt fokszámemelés után*

$$\mathbf{c}_i^{(r)} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{c}_j \binom{n}{j} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}}.$$

**Bizonyítás.** Egy fokszámemelés nem más mint az $1 = t + (1-t)$-vel való szorzás:

$$\begin{aligned}&(t + (1-t)) \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k b_{n,k}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k \binom{n}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k \frac{k+1}{n+1} b_{n+1,k+1}(t) + \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k \frac{n+1-k}{n+1} b_{n+1,k}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( \frac{k}{n+1} \mathbf{c}_{k-1} + (1 - \frac{k}{n+1}) \mathbf{c}_k \right) b_{n+1,k}(t).\end{aligned}$$

Ismételt fokszámemelés indukcióval igazolható:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_i^{(r+1)} &= \frac{i}{n+r+1}\mathbf{c}_{i-1}^{(r)} + \left(1 - \frac{i}{n+r+1}\right)\mathbf{c}_i^{(r)} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathbf{c}_j \left\{ \frac{i}{n+r+1} \frac{\binom{r}{i-1-j}}{\binom{n+r}{i-1}} + \left(1 - \frac{i}{n+r+1}\right) \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}} \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathbf{c}_j \frac{\binom{r}{i-1-j} + \binom{r}{i-j}}{\binom{n+r+1}{i}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathbf{c}_j \frac{\binom{r+1}{i-j}}{\binom{n+r+1}{i}}.
\end{aligned}$$

■

**3.7.2. Tétel.** *Ha a* $\mathbf{p}$ *$n$-edfokú Bézier görbéhez rendelt kontrollpoligont* $\mathcal{E}\mathbf{p}$ *jelöli, és az $r$-edik fokszám emelés utánit* $\mathcal{E}_r\mathbf{p}$, *akkor*

$$\lim_{r\to\infty} \mathcal{E}_r\mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

**Bizonyítás.** Legyen $t \in (0,1)$ tetszőleges fix érték, $i = i(r)$ jelölje a $t$-hez legközelebbi $\dfrac{j}{n+r}$ alakú számot. Ha két legközelibb van, akkor, mondjuk a kisebbiket. Legyen $j$ tetszőleges 0 és $n$ közti egészszám. Ha igazoljuk a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{n+r}{i}} = t^j(1-t)^{n-j}$$

relációt, akkor abból az állítás már következik. Először tekintsük a $j = 0$ esetet:

$$\frac{\binom{r}{i}}{\binom{n+r}{i}} = (1 - \frac{i}{r+n})\dots(1 - \frac{i}{r+1}) \rightarrow (1-t)^n.$$

Ha $j \neq 0$, akkor

$$\frac{\binom{r}{i-j}}{\binom{r}{i}} = \frac{i(i-1)\dots(i-j+1)}{(r-i+j)\dots(r-i+1)} \rightarrow \left(\frac{t}{1-t}\right)^j.$$

■

**3.7.3. Tétel. ("Variation diminishing" tulajdonság)** *Egy $S$ sík és a* $\mathbf{p}$ *Bézier görbe metszéspontjainak száma kisebb egyenlő mint a Bézier poligon és az $S$ metszéspontjainak száma.*

**Bizonyítás.** Könnyű látni, hogy ha tekintünk egy kontrollpoligont és egy másikat, amelyiket az elsőből egy fokszámemeléssel kaptunk (azaz lineáris interpolációval), akkor az elsőnek egy tetszőleges síkkal való metszéspontjainak száma nagyobbegyenlő mint a másiknak ugyanezzel a síkkal való metszéspontjainak a száma. Így a metszéspontok száma nagyobb vagy egyenlő, mint az ismételt fokszámemeléssel kapott poligon esetén, s ez érvényben marad a határátmenetkor. ■

**3.7.4. Következmény.** *Ha a Bézier poligon konvex, akkor a Bézier görbe is konvex.*

**Megjegyzés.** Fordítva nem igaz, van olyan Bézier görbe, ami konvex, míg a kontrollpoligonja nem az. Lásd 3.3 ábra.

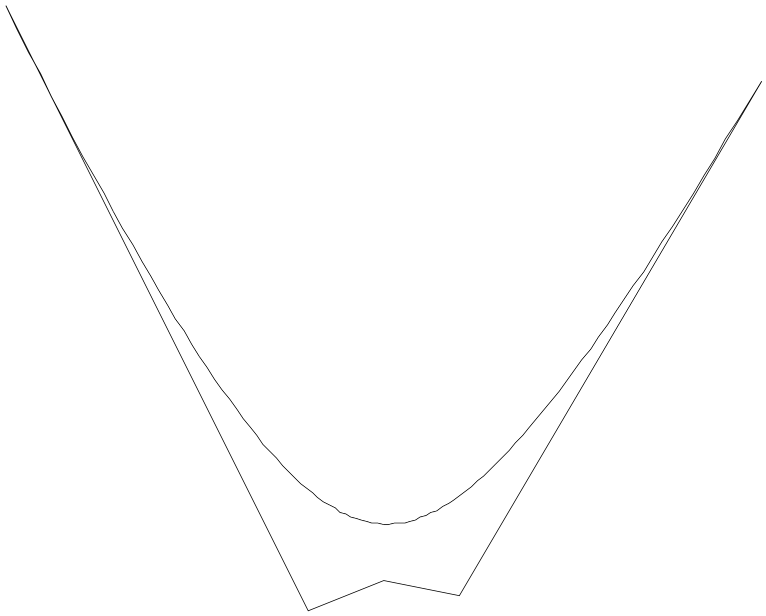

Figure 3.3: Példa konvex Bézier görbére nem konvex kontrollpoligon esetén

## 3.8 Összetett Bézier görbék

A gyakorlatban sokszor célszerű egy magasfokú Bézier görbe helyett több alacsonyfokú Bézier görbét összeilleszteni. Így egy ún. összetett Bézier görbét kapunk. Legyen adott az $[a, b]$ intervallumnak egy $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_m = b$ felosztása. Legyen

$$\mathbf{r}(t)|_{[u_j,u_{j+1}]} = \mathbf{p}_j\left(\frac{t-u_j}{\Delta_j}\right),$$

ahol $\Delta_j = u_{j+1} - u_j$, és

$$\mathbf{p}_j(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k^{\{j\}} b_{n,k}(\tau).$$

A görbénk akkor lesz $C^0$-folytonos, hogy ha $\mathbf{p}_j(1) = \mathbf{p}_{j+1}(0)$, azaz

$$\mathbf{c}_n^{\{j\}} = \mathbf{c}_0^{\{j+1\}}.$$

Továbbá a görbe akkor lesz $C^r$-folytonos, hogy ha teljesül

$$\frac{\mathbf{p}_{j-1}^{(k)}(1)}{\Delta_{j-1}^k} = \frac{\mathbf{p}_j^{(k)}(0)}{\Delta_j^k}.$$

Mint tudjuk, $G^1$-folytonosság az azt jelenti, hogy az ívhossz szerinti első deriváltak megegyeznek, azaz az érintőirányok azonossak. Ez akkor teljesül, ha:

$$\frac{\mathbf{c}_n^{\{j\}} - \mathbf{c}_{n-1}^{\{j\}}}{|\mathbf{c}_n^{\{j\}} - \mathbf{c}_{n-1}^{\{j\}}|} = \frac{\mathbf{c}_1^{\{j+1\}} - \mathbf{c}_0^{\{j+1\}}}{|\mathbf{c}_1^{\{j+1\}} - \mathbf{c}_0^{\{j+1\}}|} =: \mathbf{e}_j.$$

Hasonlóképpen a $G^2$-folytonosság esetén igaz a $G^1$-folytonosság, és az ívhossz szerinti második deriváltak megegyeznek (ebből következik a görbületfolytonosság):

$$\frac{\mathbf{c}_{n-2}^{\{j\}} - \mathbf{c}_{n-1}^{\{j\}} - \langle \mathbf{c}_{n-2}^{\{j\}} - \mathbf{c}_{n-1}^{\{j\}}, \mathbf{e}_j\rangle}{(\mathbf{c}_n^{\{j\}} - \mathbf{c}_{n-1}^{\{j\}})^2} = \frac{\mathbf{c}_2^{\{j+1\}} - \mathbf{c}_1^{\{j+1\}} - \langle \mathbf{c}_2^{\{j+1\}} - \mathbf{c}_1^{\{j+1\}}, \mathbf{e}_j\rangle}{(\mathbf{c}_1^{\{j+1\}} - \mathbf{c}_0^{\{j+1\}})^2}.$$

## 3.9 Bézier felületek

**3.9.1. Definíció.** *A Bézier görbékhez hasonlóan definiáljuk a* **Bézier felület***eket is*

$$\mathbf{p}(u,v)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}\mathbf{c}_{jk}b_{n,j}(u)b_{m,k}(v) \qquad 0\le u,v\le 1.$$

*Itt a $\mathbf{c}_{jk}\in\mathbb{R}^3$ együtthatókat a felület Bézier kontrollpontjainak hívjuk.*

**Megjegyzés.** Mivel általában ez a felület csak egy eleme egy összetett felületnek, ezért szokásos a Bézier **patch** (azaz folt) elnevezés is.

A felületnek, például az $u$-szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial\mathbf{p}(u,v)}{\partial u}=\mathbf{p}_u(u,v)=n\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{m}(\mathbf{c}_{j+1,k}-\mathbf{c}_{j,k})b_{n-1,j}(u)b_{m,k}(v).$$

A felület határa (jelen esetben a $(0,v)$ paramétervonala) mentén vett parciális deriváltat **kereszt-deriváltnak** nevezzük:

$$\mathbf{p}_u(0,v)=n\sum_{k=0}^{m}(\mathbf{c}_{1,k}-\mathbf{c}_{0,k})b_{m,k}(v).$$

## 3.10 Geometriai folytonosság

Probléma: Adottak az $\mathbf{A}(u,v)$ és $\mathbf{B}(u,v)$ Bézier patch-ek (azaz kétváltozós vektor polinomok által meghatározott felületek) és egy közös paramétervonal mentén megegyeznek:

$$\mathbf{A}(0,v)=\mathbf{B}(0,v).$$

Kérdés: mikor van köztük $n$-edrendű geometriai folytonosság ?

Itt most emlékeztetünk a $G^n$ folytonosság definíciójára:

$\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $G^n$ rendben kapcsolódik egymáshoz a $\mathbf{A}(0,v)=\mathbf{B}(0,v)$ közös paraméter vonal mentén, ha van olyan $n$-szer folytonosan differenciálható $\Phi(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v)):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ (reparametrizáló) leképezés, hogy

$$\left.\frac{\partial^k\mathbf{B}}{\partial u^k}\right|_{u=0}=\left.\frac{\partial^k\mathbf{A}(\Phi)}{\partial u^k}\right|_{u=0} \qquad (k=0,1,\ldots,n) \tag{i}$$

ahol

$$\varphi(0,v)=0 \qquad \text{and} \qquad \psi(0,v)=v \tag{ii}$$

továbbá

$$\begin{vmatrix}\varphi_u(0,v) & \varphi_v(0,v)\\ \psi_u(0,v) & \psi_v(0,v)\end{vmatrix}=\varphi_u(0,v)>0. \tag{iii}$$

A fenti definíció nem szimmetrikus $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$-re nézve. Szeretnénk találni egy olyan jellemzést, ami egyrészt szimmetrikus, másrészt világossá teszi, hogy ha mondjuk adott a közös határgörbe, akkor az azt interpoláló és egymással $G^n$ rendben kapcsolódó Bézier felületek milyen strukturájúak és mik a szabad paraméterek.

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi fogalomra

**3.10.1. Definíció.** *Egy $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ vektor polinomot* **irreducibilis***nak nevezünk, ha $x_1$, $x_2$ és $x_3$ relativ primek, azaz az $x_1$, $x_2$ és $x_3$ polinomok legnagyobb közös osztója 1.*

Más szavakkal: $\mathbf{x}(t)$ semmilyen (komplex) $t$ esetén sem lesz a $\mathbf{0}$ vektorral egyenlő. Egy *nem* irreducibilis vektor polinomot **reducibilis**nek nevezünk.

A továbbiakban $p$ és $q$ legnagyobb közös osztóját $\gcd(p,q)$-val jelöljük, azaz $p$ és $q$ relativ primek, ha $\gcd(p,q)=1$.

A továbbiakban feltételezzük, hogy mind $\mathbf{A}$ mind pedig $\mathbf{B}$ reguláris, azaz $\mathbf{A}_u \times \mathbf{A}_v \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{B}_u \times \mathbf{B}_v \neq \mathbf{0}$ a közös határ egyetlen pontjában sem.

Most kimondhatjuk, a következő tételt, ami egy elegendő feltételt ad Bézier felületek $G^n$ folytonosságára.

**3.10.2. Tétel.** *Az $\mathbf{A}(u,v)$ és $\mathbf{B}(u,v)$ Bézier felületek az $\mathbf{A}(0,v) = \mathbf{B}(0,v) =: \mathbf{C}_0(v)$ paramétervonal mentén $G^n$ rendben kapcsolódnak egymáshoz. Ha $n=1$, akkor tegyük fel, hogy $\dot{\mathbf{C}}_0$ irreducibilis, ha pedig $n>1$, akkor pedig tegyük fel, hogy a $\mathbf{C}_1 \times \dot{\mathbf{C}}_0$ vektorszorzat irreducibilis, ahol $\mathbf{C}_1 = \left.\dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}\right|_{u=0}$ és $\mathbf{P}$ az alábbiakban kerül definiálásra. Ekkor létezik egy olyan $\mathbf{P}(u,v)$ $u$-ban $n$-edfokú Bézier felület és mindkét változójukban polinomiális, $u$-ban $n$-edfokú $\Phi_A(u,v)$ és $\Phi_B(u,v)$ reparametrizáló leképezések*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(u,v) &:= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{C}_i(v)\frac{u^i}{i!},\\
\Phi_A(u,v) &:= (\varphi_A(u,v), \psi_A(u,v)) := \sum_{i=0}^{n} (\alpha_{i1}(v), \alpha_{i2}(v))\frac{u^i}{i!},\\
\Phi_B(u,v) &:= (\varphi_B(u,v), \psi_B(u,v)) := \sum_{i=0}^{n} (\beta_{i1}(v), \beta_{i2}(v))\frac{u^i}{i!}.
\end{aligned}$$

*hogy*

$$\left.\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^k \mathbf{A}}{\partial u^k}\right|_{u=0} &= \left.\frac{\partial^k \mathbf{P}(\Phi_A)}{\partial u^k}\right|_{u=0}\\
\left.\frac{\partial^k \mathbf{B}}{\partial u^k}\right|_{u=0} &= \left.\frac{\partial^k \mathbf{P}(\Phi_B)}{\partial u^k}\right|_{u=0}
\end{aligned}\right\} \qquad (k=0,1,\ldots,n). \tag{3.6}$$

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy $\mathbf{C}_1$ már az $n=1$ esetben is definiálva van, de ott csak $\dot{\mathbf{C}}_0$ irreducibilitását kívántuk meg.

**Megjegyzés.** Világos, hogy ha (3.6) teljesül, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $G^n$ folytonosan kapcsolódnak egymáshoz. A Tétel 3.10.2. azt állítja, hogy – a fenti feltételek teljesülése esetén – ez nem csak elegendő, de szükséges is.

**Megjegyzés.** Nyilvánvalóan, ha $n=1$, akkor tételünk állítása ekvivalens az alábbival: létezik olyan $\mathbf{C}_1(v)$ vektor polinom és $\alpha_{11}(v)$, $\alpha_{12}(v)$, $\beta_{11}(v)$ és $\beta_{12}(v)$ skalár polinomok, hogy

$$\mathbf{A}_u(0,v) = \alpha_{11}(v)\mathbf{C}_1(v) + \alpha_{12}(v)\dot{\mathbf{C}}_0(v), \tag{3.7}$$

$$\mathbf{B}_u(0,v) = \beta_{11}(v)\mathbf{C}_1(v) + \beta_{12}(v)\dot{\mathbf{C}}_0(v). \tag{3.8}$$

A bizonyításból könnyű kiolvasni, hogy, ha $\dot{\mathbf{C}}_0$ reducibilis, azaz létezik olyan, legalább elsőfokú $\gamma(v)$ polinom, hogy $\dot{\mathbf{C}}_0(v) = \gamma(v)\mathbf{D}(v)$ és $\mathbf{D}$ irreducibilis, akkor a következő előállítás létezését garantálhatjuk:

$$\mathbf{A}_u(0,v) = \alpha_{11}(v)\mathbf{C}_1(v) + \alpha_{12}(v)\mathbf{D}(v), \tag{3.9}$$

$$\mathbf{B}_u(0,v) = \beta_{11}(v)\mathbf{C}_1(v) + \beta_{12}(v)\mathbf{D}(v). \tag{3.10}$$

Ha $n=2$, akkor a keresztderiváltakra a következő formulákat kapjuk:

$$\mathbf{A}_{uu} = \alpha_{11}^2\mathbf{C}_2 + 2\alpha_{11}\alpha_{12}\dot{\mathbf{C}}_1 + \alpha_{12}^2\ddot{\mathbf{C}}_0 + \alpha_{21}\mathbf{C}_1 + \alpha_{22}\dot{\mathbf{C}}_0 \tag{3.11}$$

$$\mathbf{B}_{uu} = \beta_{11}^2\mathbf{C}_2 + 2\beta_{11}\beta_{12}\dot{\mathbf{C}}_1 + \beta_{12}^2\ddot{\mathbf{C}}_0 + \beta_{21}\mathbf{C}_1 + \beta_{22}\dot{\mathbf{C}}_0 \tag{3.12}$$

**Megjegyzés.** A fenti tételt $n = 1, 2$ estén (kicsit más alakban) először Degen mondta ki [Deg90]. Az általános esetet ld. [HL].

A tétel bizonyításához először néhány lemmára lesz szükségünk. A következő lemma jól ismert, bizonyítása megtalálható pl. [MS64]-ban.

**3.10.3. Lemma.** *Legyenek $a$ és $b$ relativ prim polinomok azaz $gcd(a, b) = 1$. Ekkor minden $c$ polinomhoz létezik olyan $a_1$ és $b_1$ polinom, hogy $c = ab_1 + ba_1$.*

**3.10.4. Lemma.** *Ha $a, b$ és $c$ relativ prim skalár polinomok, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ vektor polinomok, $\mathbf{C}$ irreducibilis és*

$$a\mathbf{B} = b\mathbf{A} + c\mathbf{C}$$

*akkor létezik olyan $\mathbf{D}$ vektor polinom és $a_1$ és $b_1$ skalar polinomok, hogy*

$$\mathbf{A} = a\mathbf{D} + a_1\mathbf{C},$$
$$\mathbf{B} = b\mathbf{D} + b_1\mathbf{C}.$$

**Bizonyítás.** Először vegyük észre, hogy $\gcd(a, b) = 1$, különben egy közös osztó vagy $c$-t osztaná, (ami lehetelen mivel $\gcd(a, b, c) = 1$) vagy pedig $\mathbf{C}$-t, ami azért lehetetlen, mert $\mathbf{C}$ irreducibilis. Lemma 3.10.3 szerint van olyan $a_1$ és $b_1$ polinom, hogy $c = ab_1 - ba_1$. Helyettesítsük be ezt a kifejezést $c$ helyére és akkor kapjuk:

$$a(\mathbf{B} - b_1\mathbf{C}) = b(\mathbf{A} - a_1\mathbf{C}).$$

Mivel $a$ és $b$ are relative primek, ezért létezik egy olyan $\mathbf{D}$ polinom, hogy

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{B} - b_1\mathbf{C}}{b} = \frac{\mathbf{A} - a_1\mathbf{C}}{a}$$

ahonnan a lemma állítása következik. ■

**3.10.5. Lemma.** *Legyenek $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ olyan vektor polinomok, hogy $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ irreducibilis. Ekkor, ha $\mathbf{B}$ valamilyen $f$ és $g$ skalár függvények segítségével az alábbi formába irható*

$$\mathbf{B} = f\mathbf{A} + g\mathbf{C},$$

*akkor $f$ és $g$ polinomok.*

**Bizonyítás.** Könnyű látni, hogy $f$ és $g$ racionális függvények. Szorozzuk be vektoriálisan az egyenletet $\mathbf{C}$-vel. Ekkor $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = f\mathbf{A} \times \mathbf{C}$, ahonnan nyomban kapjuk, hogy $f$ racionális és hasonlóan kapjuk, hogy $g$ is racionális. Tegyük fel, hogy legalább az egyikük nem polinom. Ekkor szorozzunk be a közös $b$ nevezővel. Kapjuk:

$$b\mathbf{B} = a\mathbf{A} + c\mathbf{C}.$$

Itt $a, b$ és $c$ már polinomok és $\gcd(a, b, c) = 1$. Ha $b$ nem konstans, akkor $b$-nek van egy $t$ valós vagy komplex gyöke. Helyettesítsük ezt az egyenletünkbe. A baloldal $\mathbf{0}$ lesz, de sem $\mathbf{A}(t)$ sem pedig $\mathbf{C}(t)$ nem $\mathbf{0}$ különben $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ nem lenne irreducibilis. Ha $a(t)$ 0 lenne, akkor $c(t)$-nek is 0-nak kellene lennie, ami ellentmond annak, hogy $\gcd(a, b, c) = 1$. Így sem $a(t)$ sem pedig $c(t)$ sem 0, amiből következik, hogy $\mathbf{A}(t)$ és $\mathbf{C}(t)$ párhuzamosak egymással. De ekkor ellentmondásba kerülünk azzal, hogy $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ irreducibilis, vagyis $b$ konstans, azaz $f$ és $g$ polinomok. ■

A következő lemma Faá di Bruno formulájának (ld. [Knu82]) egy egyszerűsített változata:

**3.10.6. Lemma.** *Legyen $f(u, v), \varphi(t)$ és $\psi(t)$ be $n-$szer folytonosan differenciálható függvények. Ekkor*

$$\frac{d^n f(\varphi(t), \psi(t))}{dt^n} = \frac{\partial^n f}{\partial u^n}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^n + S + f_u\frac{d^n\varphi}{dt^n} + f_v\frac{d^n\psi}{dt^n}$$

*ahol $S$ az $f$,$\varphi$ és $\psi$ olyan (parciális) deriváltjai szorzatainak összege, hogy a deriváltak rendje mindig kisebb mint $n$.*

**Bizonyítás.** Indukcióval közvetlenül következik. ■

Most térjünk rá a tétel bizonyítására.

**Bizonyítás.** Definíció szerint létezik egy $\Phi(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ $C^n$ leképezés, hogy (i)-(iii) teljesül.

A tételt $n$-re vonatkozó indukcióval bizonyitjuk.

Először tekinsük az $n = 1$ esetet. A láncszabály szerint

$$\mathbf{B}_u(0,v) = \mathbf{A}_u(0,v)\varphi_u(0,v) + \mathbf{A}_v(0,v)\psi_u(0,v)$$

azaz

$$\mathbf{B}_u(0,v) = \mathbf{A}_u(0,v)\varphi_u(0,v) + \dot{\mathbf{C}}_0(v)\psi_u(0,v).$$

A Lemma 3.10.5 bizonyításához hasonlóan könnyen következik, hogy $\varphi_u(0,v)$ és $\psi_u(0,v)$ racionális függvények. Közös nevezőre hozva és azzal beszorozva kapjuk, hogy

$$\alpha_{11}\mathbf{B}_u = \beta_{11}\mathbf{A}_u + \gamma\dot{\mathbf{C}}_0$$

ahol teljesül $(\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma) = 1$. Most Lemma 3.10.4 szerint $\gcd(\alpha_{11}, \beta_{11}) = 1$ és léteznek olyan $\mathbf{C}_1, \alpha_{12}$ és $\beta_{12}$ polinomok, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_u &= \alpha_{11}\mathbf{C}_1 + \alpha_{12}\dot{\mathbf{C}}_0\\ \mathbf{B}_u &= \beta_{11}\mathbf{C}_1 + \beta_{12}\dot{\mathbf{C}}_0.\end{aligned}$$

Ez pedig a tétel állitását jelenti $n = 1$ esetén:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u,v) &= \mathbf{C}_0(v) + \mathbf{C}_1(v)u,\\ \Phi_A(u,v) &= (0,v) + (\alpha_{11}(v), \alpha_{12}(v))u,\\ \Phi_B(u,v) &= (0,v) + (\beta_{11}(v), \beta_{12}(v))u.\end{aligned}$$

Az **A** és **B** regularitásából következik, hogy **P** is reguláris.

Most tegyük fel, hogy a Tétel igaz ha $n$-re és ebből kiindulva bizonyítsuk be $n+1$-re.

Vagyis egyrészt feltételezzük, hogy

$$\left.\frac{\partial^k \mathbf{B}}{\partial u^k}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^k \mathbf{A}(\Phi)}{\partial u^k}\right|_{u=0} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n, n+1) \tag{3.13}$$

másrészt pedig teljesül, hogy

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial^k \mathbf{A}}{\partial u^k}\right|_{u=0} &= \left.\frac{\partial^k \mathbf{P}(\Phi_A)}{\partial u^k}\right|_{u=0}\\ \left.\frac{\partial^k \mathbf{B}}{\partial u^k}\right|_{u=0} &= \left.\frac{\partial^k \mathbf{P}(\Phi_B)}{\partial u^k}\right|_{u=0}\end{aligned}\right\} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

ahol

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u,v) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{C}_i(v)\frac{u^i}{i!}\\ \Phi_A(u,v) = (\varphi_A(u,v), \psi_A(u,v)) &= \sum_{i=0}^{n}(\alpha_{i1}(v), \alpha_{i2}(v))\frac{u^i}{i!}\\ \Phi_B(u,v) = (\varphi_B(u,v), \psi_B(u,v)) &= \sum_{i=0}^{n}(\beta_{i1}(v), \beta_{i2}(v)).\frac{u^i}{i!}\end{aligned}$$

A fentiek szerint

$$\left.\frac{\partial^k \mathbf{P}(\Phi_a(\Phi))}{\partial u^k}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^k \mathbf{P}(\Phi_B)}{\partial u^k}\right|_{u=0}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Teljes indukcióval könnyen bizonyítható, hogy ebből következik, hogy

$$\left.\frac{\partial^k \Phi_a(\Phi)}{\partial u^k}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^k \Phi_B}{\partial u^k}\right|_{u=0}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Most tekintsük $\mathbf{P}(\Phi_A)$ $(n+1)$-ik keresztderiváltját. Lemma 3.10.6 szerint

$$\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}(\Phi_A)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \alpha_{11}^{n+1} + \mathbf{S}_A + \mathbf{P}_u \left.\frac{\partial^{n+1} \varphi_A}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} + \mathbf{P}_v \left.\frac{\partial^{n+1} \psi_A}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0}$$

ahol a $\mathbf{S}_A$ összeg nem tartalmaz $u$-szerinti $(n+1)$-edrendű parciális deriváltat. De $\mathbf{P}$ és $\Phi_A$ mindketten $n$-edfokú polinomjai $u$-nak, így

$$\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}(\Phi_A)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = \mathbf{S}_A. \tag{3.14}$$

Hasonló jelöléssel és meggondolással kapjuk, hogy:

$$\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}(\Phi_B)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = \mathbf{S}_B. \tag{3.15}$$

Most tekintsük $\mathbf{P}(\Phi_A(\Phi))$ $(n+1)$-edik keresztderiváltját, úgy, mint $\mathbf{P}(\Phi_A)$ és $\Phi$ össztett függvényét:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}(\Phi_A(\Phi))}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = {} & \left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}(\Phi_A)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \varphi_u^{n+1} + \mathbf{S}_\Phi + \\ & \left.\frac{\partial \mathbf{P}(\Phi_A)}{\partial u}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} + \left.\frac{\partial \mathbf{P}(\Phi_A)}{\partial v}\right|_{u=0} \left.\frac{\partial^{n+1} \psi}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0}\end{aligned} \tag{3.16}$$

valamint úgy mint $\mathbf{P}$ és $\Phi_A(\Phi)$ összetett függvényét:

$$\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}(\Phi_A(\Phi))}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{P}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \beta_{11}^{n+1} + \mathbf{S}_1 + \mathbf{P}_u \left.\frac{\partial^{n+1} \varphi_A(\Phi)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} + \mathbf{P}_v \left.\frac{\partial^{n+1} \psi_A(\Phi)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0}. \tag{3.17}$$

Vegyük észre, hogy az $u$ szerinti alacsony rendű deriváltak, azaz $\mathbf{S}_1$ nem más, mint az alacsony rendű deriváltak (3.15)-ban, azaz $\mathbf{S}_B$. (3.13)-ből kapjuk, hogy

$$\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{B}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{A}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \varphi_u^{n+1} + \mathbf{S}_\Phi + \mathbf{A}_u \left.\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} + \mathbf{A}_v \left.\frac{\partial^{n+1} \psi}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0}. \tag{3.18}$$

Itt ismét az alacsonyrendű tagokat tartalmazó összeg az ugyanaz, mint (3.16)-ban. A (3.14)-(3.18) formulák segítségével a következő egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}^{n+1}\left(\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{B}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} - \mathbf{S}_B\right) - \beta_{11}^{n+1}\left(\left.\frac{\partial^{n+1} \mathbf{A}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} - \mathbf{S}_A\right) = {} \\ \mathbf{P}_u \left.\frac{\partial^{n+1} \varphi_A(\Phi)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \alpha_{11}^{n+1} + \mathbf{P}_v \left.\frac{\partial^{n+1} \psi_A(\Phi)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \alpha_{11}^{n+1}.\end{aligned}$$

(Emlékeztetünk rá, hogy $\varphi_u = \dfrac{\beta_{11}}{\alpha_{11}}$.) Ebben az egyenletben a bal oldal az egy polinom, és a tételünk feltételei szerint $\mathbf{P}_u(0,v) \times \mathbf{P}_v(0,v)$ azaz $\mathbf{C}_1(v) \times \dot{\mathbf{C}}_0(v)$ irreducibilis, így alkalmazhatjuk Lemma 3.10.5-t. Ezek szerint $\mathbf{P}_u$ és $\mathbf{P}_v$ együtthatói is polinomok. Mivel $\alpha_{11}$ és $\beta_{11}$ relativ primek,

$\gcd(\alpha_{11}^{n+1}, \beta_{11}^{n+1}) = 1$, így Lemma 3.10.3 szerint léteznek olyan $\alpha_{n+1,1}, \alpha_{n+1,2}, \beta_{n+1,1}$ és $\beta_{n+1,2}$ polinomok, hogy

$$\left.\frac{\partial^{n+1}\varphi_A(\Phi)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \alpha_{11}^{n+1} = \alpha_{11}^{n+1}\beta_{n+1,1} - \beta_{11}^{n+1}\alpha_{n+1,1}$$
$$\left.\frac{\partial^{n+1}\psi_A(\Phi)}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} \alpha_{11}^{n+1} = \alpha_{11}^{n+1}\beta_{n+1,2} - \beta_{11}^{n+1}\alpha_{n+1,2}.$$

Így

$$\alpha_{11}^{n+1}\left(\left.\frac{\partial^{n+1}\mathbf{B}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} - \mathbf{S}_B - \beta_{n+1,1}\mathbf{C}_1 - \beta_{n+1,2}\dot{\mathbf{C}}_0\right) =$$
$$\beta_{11}^{n+1}\left(\left.\frac{\partial^{n+1}\mathbf{A}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} - \mathbf{S}_A - \alpha_{n+1,1}\mathbf{C}_1 - \alpha_{n+1,2}\dot{\mathbf{C}}_0\right).$$

Innen következik, (Lemma 3.10.4) bizonyításához hasonlóan), hogy létezik egy olyan $\mathbf{C}_{n+1}(v)$ polinom, hogy

$$\left.\frac{\partial^{n+1}\mathbf{A}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = \alpha_{11}^{n+1}\mathbf{C}_{n+1} + \mathbf{S}_A + \alpha_{n+1,1}\mathbf{C}_1 + \alpha_{n+1,2}\dot{\mathbf{C}}_0$$
$$\left.\frac{\partial^{n+1}\mathbf{B}}{\partial u^{n+1}}\right|_{u=0} = \beta_{11}^{n+1}\mathbf{C}_{n+1} + \mathbf{S}_B + \beta_{n+1,1}\mathbf{C}_1 + \beta_{n+1,2}\dot{\mathbf{C}}_0.$$

Tehát, ha a következő definíciót használjuk:

$$\mathbf{P}_{n+1}(u,v) = \sum_{i=0}^{n+1}\mathbf{C}_i(v), \frac{u^i}{i!}$$
$$\Phi_{A,n+1}(u,v) = \sum_{i=0}^{n+1}(\alpha_{i1}(v), \alpha_{i2}(v)), \frac{u^i}{i!}$$
$$\Phi_{B,n+1}(u,v) = \sum_{i=0}^{n+1}(\beta_{i1}(v), \beta_{i2}(v)). \frac{u^i}{i!}$$

akkor azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{l} \left.\frac{\partial^k\mathbf{A}}{\partial u^k}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^k\mathbf{P}_{n+1}(\Phi_{A,n+1})}{\partial u^k}\right|_{u=0} \\ \left.\frac{\partial^k\mathbf{B}}{\partial u^k}\right|_{u=0} = \left.\frac{\partial^k\mathbf{P}_{n+1}(\Phi_{B,n+1})}{\partial u^k}\right|_{u=0} \end{array}\right\} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$$

ami már a tételünk bizonyítását adja. ■

## 3.11 Bézier háromszögek

Kétváltozós polinomot más formában is felírhatunk. Egy lehetséges alak az alábbi Bézier háromszög.

A háromszög patch paraméter tartománya egy síkbeli háromszög:

**3.11.1. Definíció.**

$$\mathcal{T} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \,:\, 0 \le \lambda_i \le 1,\, i = 1,2,3;\, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

*A $\lambda_i$-k az ún.* **baricentrikus** *koordináták*

$$\mathbf{V} := (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

A baricentrikus koordináták egy jelentése: ha $\mathcal{T}$ alapháromszög területe 1, akkor a pontot a háromszög csúcsaival összekötve kapott három kis részháromszög területe $\lambda_1$, $\lambda_2$ és $\lambda_3$ lesz. (Vegyük észre, hogy $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *nem* három független paraméter. Két paraméter is elég lenne, de akkor elvesztenénk a szimmetriát.)

A paramétertartomány csúcsait jelöljük $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ és $\mathbf{V}_3$-mal. Nyilván $\mathbf{V}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{V}_2 = (0,1,0)$ és $\mathbf{V}_3 = (0,0,1)$. $\mathbf{V}_i$-vel szemben levő oldalát jelöljük $\mathbf{E}_i$-vel. Az $\mathbf{E}_i$ oldalt baricentrikus koordinátákkal a következő módon írhatjuk fel:

$$\mathbf{E}_1 = \{(0,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathcal{T}\}, \qquad \mathbf{E}_2 = \{(\lambda_1,0,\lambda_3) \in \mathcal{T}\}, \qquad \mathbf{E}_3 = \{(\lambda_1,\lambda_2,0) \in \mathcal{T}\}.$$

Tekintsünk egy, a $\mathcal{T}$-n értelmezett $F(\mathbf{V})$ függvényt. Ennek számunkra érdekes iránymenti deriváltjai a következőek.

**3.11.2. Definíció.** *Egy éllel (mondjuk az $\mathbf{E}_3$ éllel) párhuzamos iránymenti deriváltat ad a következő határérték:*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{E}_3}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(F(\lambda_1-\epsilon,\lambda_2+\epsilon,\lambda_3) - F(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right).$$

*Egy (mondjuk az $\mathbf{E}_2$) élre merőleges iránymenti derivált pedig:*

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{E}}_2}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) := \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(F(\lambda_1-\epsilon,\lambda_2+2\epsilon,\lambda_3-\epsilon) - F(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right).$$

**3.11.3. Jelölés.** *A multiindex:*

$$\mathbf{i} = (i,j,k) \qquad i,j,k \geq 0.$$

*A multiindex normája:*

$$|\mathbf{i}| = i+j+k.$$

*A multinomiális együttható:*

$$\binom{|\mathbf{i}|}{\mathbf{i}} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}.$$

**3.11.4. Definíció.** *Bézier háromszög:*

$$\mathbf{p}(\mathbf{V}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{c}_{\mathbf{i}} \binom{n}{\mathbf{i}} \lambda_1^i \lambda_2^j \lambda_3^k$$

**Megjegyzés.** A definíció alapján világos, hogy egy Beziér háromszög éppen úgy egy kétváltozós polinom, mint a Bézier patch, csak más a reprezentáció.

**Megjegyzés.** Egy Bézier háromszög $n$ fokszáma nem más mint a kétváltozós polinom *teljes fokszáma* (*total degree*), azaz, ha $\mathbf{p}(\mathbf{V})$ $n$-edfokú Bézier háromszöget felirjuk mint, mondjuk $\lambda_1$ és $\lambda_2$ polinomját, akkor

$$\mathbf{p}(\mathbf{V}) = \sum_{0\leq i,j;\, i+j\leq n} \mathbf{p}_{ij} \lambda_1^i \lambda_2^j.$$

Egy többváltozós polinom teljes fokszáma nem változik, ha a változóira lineáris transzformációt alkalmaznak.

Egy $\mathbf{Q}(u,v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{q}_{ij} b_{n,i}(u) b_{m,j}(v)$ Bézier patch teljes fokszáma kisebb egyenlő mint $n+m$. Az $n$, $m$ fokszámok (jó magyar kifejezést nem tudok rájuk, az angol terminus *partial degree*) egy lineáris átparaméterezés esetén megváltozhatnak.

**3.11.5. Példa.** *Az egyszerűség kedvéért tekintsünk csak skalár polinimokat. Legyen*

$$Q(u,v) = u^2 - 2uv + v^2 = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} q_{ij} b_{2,i}(u) b_{2,j}(v).$$

*Itt $q_{20} = q_{02} = 1$ és $q_{11} = -0.5$, míg a többi együttható 0. Nyilván a polinom teljes fokszáma 2 és mindkét változóban a partial degree ugyancsak 2. Vezessük be az $x = u - v$, $y = u + v$ lineáris paramétertranszformációt. Nyilván*

$$P(x, y) = Q\left(\frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2}\right) = x^2$$

*polinom teljes fokszáma maradt 2, de most a partial degree-k megváltoztak: az $x$-é 2, $y$-é pedig 0.*

**Megjegyzés.** Világos, hogy egy Bézier háromszög felület mindhárom határgörbéje Bézier görbe lesz. Például az $\mathbf{E}_1$ oldalhoz tartozó határgörbe egyenlete:

$$\sum_{j+k=n} \mathbf{c}_{0,j,k} \frac{(j+k)!}{j!k!} \lambda_2^j \lambda_3^k = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{c}_{0,j,n-j} b_{n,j}(\lambda_2).$$

**3.11.6. Lemma.** *Ha egy $n$-ed fokú Bézier háromszöget egy $n+1$-edfokú Bézier háromszögként írunk fel (fokszámemelés) azaz*

$$\sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{c}_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{V}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n+1} \hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}}^{n+1}(\mathbf{V}),$$

*akkor az új kontrollpontokat a következő módon kapjuk meg:*

$$\hat{\mathbf{c}}_{(i_1,i_2,i_3)} = \frac{1}{n+1}\left(i_1 \mathbf{c}_{(i_1-1,i_2,i_3)} + i_2 \mathbf{c}_{(i_1,i_2-1,i_3)} + i_3 \mathbf{c}_{(i_1,i_2,i_3-1)}\right).$$

**Bizonyítás.** A bizonyítás teljesen analóg a Bézier görbe esetében követettel: szorozzuk be a patchet $1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$-mal, és rendezzük át a Bernstein alappolinomok szerint. ∎

**3.11.7. Lemma.** *Tekintsük a Bézier háromszög egy határpontját. Ez rajta van az egyik (mondjuk $\mathbf{E}_1$) oldalon. Tekintsük azt az iránymenti deriváltat, amelyet úgy kapunk, hogy az irányt a szembenlevő csúcs (azaz $\mathbf{V}_1$) és az adott pont határozzák meg. Ekkor a deriváltat a kontrollpontok segítségével a*

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V})}(\mathbf{V}) = n\left(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{c}_{(1,i,n-i-1)} b_{n-1,i}(\lambda_2) - \sum_{i=0}^{n} \mathbf{c}_{(0,i,n-i)} b_{n,i}(\lambda_2)\right)$$

*képlettel írhatjuk le. Itt $\mathbf{V} \in \mathbf{E}_1$.*

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy ez a formula nagyon hasonlít a négyszög patch keresztderiváltjára kapotthoz, és ez is csak az oldalon levő kontrollpontoktól, ill. a következő sorban lévő kontrollpontoktól függ. Ha a háromszögoldalra (azaz az $\mathbf{E}_1$ határgörbére) fokszámemelést hajtunk végre, akkor a négyszög patchével azonos formájú keresztderiváltat kapunk.

**Bizonyítás.** Definíció szerint, ha $\mathbf{V} \in \mathbf{E}_1$, azaz $\mathbf{V} = (0, \lambda_2, 1 - \lambda_2)$, akkor

$$\frac{\partial F}{\partial(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V})}(\mathbf{V}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(F(\epsilon, (1-\epsilon)\lambda_2, (1-\epsilon)\lambda_3) - F(0, \lambda_2, \lambda_3)\right).$$

Számítsuk ki ezt a határértéket, ha $F$ helyére a $b_{\mathbf{i}}^n$ Bernstein alappolinomokat rakjuk. Itt, szokás szerint, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$ és $i_1 + i_2 + i_3 = n$. Három esetet vizsgálunk: ha $i_1 = 0$, ha $i_1 = 1$ és ha $i_1 > 1$.

Tegyük fel, hogy $i_1 = 0$. Ekkor

$$b_{\mathbf{i}}^n(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = b_{n,i_2}(\lambda_2)$$

és

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(b_{n,i_2}((1-\epsilon)\lambda_2) - b_{n,i_2}(\lambda_2)\right) = b_{n,i_2}(\lambda_2) \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(1-\epsilon)^n - 1}{\epsilon} = -n b_{n,i_2}(\lambda_2).$$

Ha $i > 0$ akkor

$$b_{\mathbf{i}}^n(0, \lambda_2, \lambda_3) = 0$$

így

$$\frac{\partial b_{\mathbf{i}}^n}{\partial(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V})}(\mathbf{V}) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} b_{\mathbf{i}}^n(\epsilon, (1-\epsilon)\lambda_2, (1-\epsilon)\lambda_3).$$

Ha $i_1 = 1$, akkor

$$b_{\mathbf{i}}^n(\epsilon, (1-\epsilon)\lambda_2, (1-\epsilon)\lambda_3) = \frac{n!}{1!i_2!(n-1-i_2)!}\epsilon(1-\epsilon)^{n-1}\lambda_2^{i_2}(1-\lambda_2)^{n-1-i_2}$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} b_{\mathbf{i}}^n(\epsilon, (1-\epsilon)\lambda_2, (1-\epsilon)\lambda_3) = n b_{n-1,i_2}(\lambda_2).$$

Végül pedig, ha $i > 1$, akkor

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} b_{\mathbf{i}}^n(\epsilon, (1-\epsilon)\lambda_2, (1-\epsilon)\lambda_3) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}\epsilon^{i_1}(1-\epsilon)^{n-i_1}\lambda_2^{i_2}\lambda_3^{i_3} = 0.$$

Ezekből az állítás már közvetlenül következik. ■

A fentebb vázolt apparátus lehetővé teszi, hogy megadjunk, egy gyakran alkalmazott *elegendő* feltételt Bézier háromszögek közti $G^1$ folytonosságra:

**3.11.8. Lemma.** *(Farin feltétele) Tekintsünk két $(n+1)$-edfokú Bézier háromszöget, amelyeknek egy oldaluk közös, és ez a közös oldal pedig csak $n$-edfokú. Ennek a közös oldalnak a kontrollpontjait jelöljük $\mathbf{S}_0, \dots, \mathbf{S}_n$-nel. Tudjuk, hogy a keresztderiváltak (így a $G^1$ folytonosság is) csak az egy-egy szomszédos kontrollpont-sortól függ. Ezeket nevezzük rendre $\mathbf{T}_0, \dots, \mathbf{T}_n$-nek, ill. $\mathbf{R}_0, \dots, \mathbf{R}_n$-nek. Ha léteznek olyan $\alpha$, $\beta_0$ és $\beta_1$ nem 0 számok, hogy teljesül a*

$$(\mathbf{S}_i - \mathbf{T}_i) + \alpha(\mathbf{S}_i - \mathbf{R}_i) + \beta_0 \frac{n-i}{n}(\mathbf{S}_{i+1} - \mathbf{S}_i) + \beta_1 \frac{i}{n}(\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_{i-1}) = \mathbf{0}$$

*egyenlőség, akkor a két Bézier háromszög $G^1$ folytonos.*

**Bizonyítás.** Használjuk az alábbi jelöléseket:

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{S}_i b_{n,i}(t)$$
$$\mathbf{T}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{T}_i b_{n,i}(t)$$
$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{R}_i b_{n,i}(t).$$

Ekkor az előző Lemma szerint

$$(n+1)(\mathbf{S}(t) - \mathbf{T}(t)) \qquad (n+1)(\mathbf{S}(t) - \mathbf{R}(t))$$

lesznek a keresztderiváltak és tudjuk, hogy a $G^1$ folytonosság feltétele az, hogy a keresztderiváltak valamint $\dot{\mathbf{S}}(t)$ egy síkban legyenek, azaz lineárisan összefüggőek legyenek. Tegyük fel, hogy fennáll a következő egyenlőség:

$$[\mathbf{S}(t) - \mathbf{T}(t)] + \alpha[\mathbf{S}(t) - \mathbf{R}(t)] + [\beta_0(1-t) + \beta_1 t]\frac{1}{n}\dot{\mathbf{S}}(t) = \mathbf{0}.$$

Ez nyilván egy *elegendő* feltétele a $G^1$ folytonosságnak. Ha felírjuk a polinomokat mint $n$-edfokú Bézier-ket, akkor az így kapott kontrollpontoknak $\mathbf{0}$-nak kell lenniük, mert a Bernstein alappolinomok bázist alkotnak. Innen az állítást kapjuk. ■

**Megjegyzés.** Tekintsük a fenti feltételek közül az elsőt és az utolsót:

$$(\mathbf{S}_0 - \mathbf{T}_0) + \alpha(\mathbf{S}_0 - \mathbf{R}_0) + \beta_0(\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0) = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{S}_n - \mathbf{T}_n) + \alpha(\mathbf{S}_n - \mathbf{R}_n) + \beta_0(\mathbf{S}_n - \mathbf{S}_{n-1}) = \mathbf{0}.$$

Ennek egy geometriai interpretációja a következő. Egyrészt az $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{T}_0$ és $\mathbf{R}_0$ pontok illetve a $\mathbf{S}_{n-1}$, $\mathbf{S}_n$, $\mathbf{T}_n$ és $\mathbf{R}_n$ pontok egy síkban vannak, másrészt

$$\frac{\mathrm{area}(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{T}_0)}{\mathrm{area}(\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_1, \mathbf{R}_0)} = \frac{\mathrm{area}(\mathbf{S}_{n-1}, \mathbf{S}_n, \mathbf{T}_n)}{\mathrm{area}(\mathbf{S}_{n-1}, \mathbf{S}_n, \mathbf{R}_n)}$$

ahol $\mathrm{area}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ csúcsú háromszög területét jelenti.

## 3.12 Racionális Bézier görbék

**3.12.1. Definíció.** *Egy racionális Bézier görbét a következő módon definiálunk*

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k w_k b_{n,k}(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k b_{n,k}(t)} \qquad w_k > 0 \quad (k = 0, \ldots, n), \qquad t \in [0,1], \tag{3.19}$$

*ahol* $\{\mathbf{c}_k\} \subset \mathbb{R}^3$ *a görbe kontrollpontjai és* $\{w_k\}$ *a kontrollpontokhoz tartozó* **súly***ok.*

A racionális Bézier felület definíciója analóg a görbééhez.

**3.12.2. Definíció.** *Legyenek adva a* $\mathbf{c}_{i,j} \in RR^3$ *kontrollpontok és a* $w_{i,j} > 0$ *súlyok. Ekkor*

$$\mathbf{p}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{c}_{i,j} w_{i,j} b_{n,i}(u) b_{m,j}(v)}{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} w_{i,j} b_{n,i}(u) b_{m,j}(v)} \qquad 0 \le u, v \le 1$$

*felületet racionális Bézier felületnek nevezzük.*

Ha $\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{ij} \in \mathbb{R}^m$, akkor legyen

$$\hat{\mathbf{c}}_k = \begin{pmatrix} w_k \\ w_k \mathbf{c}_k \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{c}}_{i,j} = \begin{pmatrix} w_{i,j} \\ w_{i,j} \mathbf{c}_{i,j} \end{pmatrix}, \in \mathbb{R}^{m+1}$$

és

$$\hat{\mathbf{p}}(t) = \sum_{k=0}^{n} \hat{\mathbf{c}}_k b_{n,k}(t), \quad \hat{\mathbf{p}}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \hat{\mathbf{c}}_{i,j} b_{n,i}(u) b_{m,j}(v) \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

A $\mathbf{p}(t)$ racionális görbe, ill. a $\mathbf{p}(u,v)$ racionális felület a $\hat{\mathbf{p}}(t)$ polinomiális görbe, ill. $\hat{\mathbf{p}}(u,v)$ polinomiális felület centrális vetülete.

**Megjegyzés.** Tekintsük a $\mathbf{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ pontot és az

$$S = \{(1, p_1, \ldots, p_m) \,:\, p_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, m)\}$$

(hiper)síkot. A $\mathbf{q}$ $S$ síkra való centrális vetülete $\left(1, \frac{q_1}{q_0}, \ldots, \frac{q_m}{q_0}\right)$.

Így könnyen láthatóak a racionális Bézier reprezentáció alábbi tulajdonságai:

- Általánosítása a polinomoknak: ha $w_0 = \cdots = w_n$, akkor $\mathbf{p}$ polinom.
- Affin invariancia: A görbe (felület) affin transzformáltja megegyezik a kontrollpontok affin transzformáltjához tartozó görbével (felülettel).
- Konvex burok tulajdonság: A kontrollpontok konvex burka tartalmazza a görbét (felületet). (Itt használjuk ki, hogy a súlyok pozitívak.)

- Végponti interpoláció: $\mathbf{p}(0) = \mathbf{c}_0$ és $\mathbf{p}(1) = \mathbf{c}_n$, ill. a felület a sarokpontokban interpolálja a sarok kontrollpontokat.
- Végponti tangens: A végpontban a görbe a kontrollpoligonhoz simul — a vetítés megőrzi ezt a tulajdonságot.
- Szimmetria: Öröklődik a (levetített) Bézier polinom szimmetriájából.
- Pszeudo lokális kontroll: Az i-edik kontrollpont megváltoztatása legerősebben a görbe $\frac{i}{n}$ paraméterű pontjában jelentkezik.
- Változást csökkentő tulajdonság — a vetítés megőrzi ezt a tulajdonságot.
- Stabilitás: Ha a $\mathbf{p}(t)$ görbe minden Bézier kontrollpontjának legfeljebb $\epsilon$ hibája van, akkor a görbe tetszőleges pontjában a hiba legfeljebb $\epsilon$. A súlyokkal már óvatosabban kell eljárni. Némi pongyolasággal, ha a súlyok $\epsilon$ hibája nagyságrenddel kisebb mint a minimális súly, akkor a reprezentáció stabil.

**Megjegyzés.** Világos, hogy mind a fokszámemelés, mind pedig a szubdivíziós algoritmusok könnyen átvihetőek racionális görbékre. Az algoritmusokat a $\hat{\mathbf{p}}$-ra kell alkalmazni.

**Megjegyzés.** Egy racionális görbét előállíthatunk

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} \mathbf{q}_k b_{n,k}(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k b_{n,k}(t)}$$

alakban is. Ha most $0 < k < n$ esetén a súlyoktól csak azt követeljük meg, hogy $w_k \geq 0$ és van olyan $w_j$ súly, hogy $w_j = 0$, akkor a görbét nem írhatjuk fel ($n$-edfokú) racionális Bézier alakban. A $\mathbf{q}_j$-t szokásos **végtelen távoli kontrollpont**nak nevezni. Evidens, hogy megfelelő számú fokszámemelés után valamennyi súly pozitív lesz, így nincs akadálya az emelt fokszámú racionális Bézier alakba való transzformációnak.

### 3.12.1 Derivált

**Megjegyzés.** Könnyű számolással adódik (3.19)-ből, hogy

$$\dot{\mathbf{p}}(0) = n\frac{w_1}{w_0}(\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0),$$

tehát a görbe a végpontokban érinti a kontrollpoligont.

### 3.12.2 Átparaméterezés

Legyen $s = \varphi(t)$ egy lineáris törtfüggvény, ami monoton növekvő módon leképezi a $[0, 1]$ intervallumot a $[0, 1]$ intervallumra. Az ilyen leképezések általános alakja:

$$\varphi(t) = \frac{t}{(1-a)t + a},$$

ahol $a > 0$. Ekkor

$$b_{n,k}(\varphi(t)) = \frac{a^{n-k}}{[(1-a)t + a]^n} b_{n,k}(t),$$

így

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(\varphi(t)) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \mathbf{c}_k w_k a^{n-k} b_{n,k}(t)}{\sum_{k=0}^{n} w_k a^{n-k} b_{n,k}(t)},$$

azaz az átparaméterezett görbében csak a súlyok változnak meg.

**Megjegyzés.** A fentiekből következik, hogy még azonos bázis esetén sem egyértelmű egy ray-ciy-oy-náy-lis Bézier reprezentációja - ellentétben a Bézier görbékkel. Egyfajta uniformitást érhetünk el, ha a számlálót és nevezőt $w_n$-lal elosztjuk azaz $w_n$-t 1-nek választjuk. Továbbá az átparaméterező függvényben szereplő $a$ érték alkalmas megválasztásával elérhetjük $w_0 = 1$-t is.

## 3.13 Másodfokú racionális Bézier görbék

A racionális Bézier görbék közül különösen fontosak a másodfokúak. A jelentőségüket az adja meg, hogy — mint látni fogjuk — ezek egy kúpszeletívnek a parametrikus alakját szolgáltatják.

Tekintsünk egy másodfokú racionális Bézier görbét:

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{c}_0 w_0 b_{2,0}(t) + \mathbf{c}_1 w_1 b_{2,1}(t) + \mathbf{c}_2 w_2 b_{2,2}(t)}{w_0 b_{2,0}(t) + w_1 b_{2,1}(t) + w_2 b_{2,2}(t)}.$$

Legyen

$$\mathbf{U} = \mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1 \qquad \mathbf{V} = \mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1,$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{c}_1 + \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{V} = \alpha\mathbf{c}_0 + (1-\alpha-\beta)\mathbf{c}_1 + \beta\mathbf{c}_2.$$

Most

$$\alpha(t) = \frac{w_0 b_{2,0}(t)}{w(t)} \qquad \beta(t) = \frac{w_2 b_{2,2}(t)}{w(t)},$$

ahol $w(t) = \sum_{k=0}^{2} w_k b_{2,k}(t)$. Innen kapjuk, hogy

$$\alpha\beta = \frac{w_0 w_2}{w^2} b_{2,0}(t) b_{2,2}(t) = \frac{w_0 w_2}{4w^2} b_{2,1}^2(t) = \frac{w_0 w_2}{4w_1^2}(1-\alpha-\beta)^2.$$

Ezek szerint

$$\alpha\beta = k(1-\alpha-\beta)^2,$$

ahol $k = \dfrac{w_0 w_2}{4w_1^2}$, azaz a görbe leírható mint egy másodrendű görbe (az $\alpha$ és $\beta$ változókban), azaz kúpszelet.

Legyen

$$w^*(t) = w_0 b_{2,0}(t) - w_1 b_{2,1}(t) + w_2 b_{2,2}(t),$$
$$\mathbf{p}^*(t) = \frac{w_0 \mathbf{c}_0 b_{2,0}(t) - w_1 \mathbf{c}_1 b_{2,1}(t) + w_2 \mathbf{c}_2 b_{2,2}(t)}{w^*(t)}.$$

Ekkor egyrészt $\mathbf{p}^*(t)$ is kielégíti a fenti másodfokú egyenletet, tehát ugyanahhoz a másodrendű görbéhez tartozik, másrészt

$$\mathbf{p}^*(t) - \mathbf{c}_1 = \frac{w(t)}{w^*(t)}\left(\mathbf{p}(t) - \mathbf{c}_1\right)$$

Rendezzük át $w^*(t)$-t a $t$ hatványai szerint:

$$w^*(t) = (w_0 + 2w_1 + w_2)t^2 - 2(w_0 + w_1)t + w_0.$$

A megoldóképlet segítségével adódnak $w^*(t)$ gyökei:

$$t_{1,2} = \frac{w_0 + w_1 \pm w_1\sqrt{1-4k}}{w_0 + 2w_1 + w_2}.$$

Ha $4k > 1$, akkor $w^*$-nak nincs valós gyöke, így $\mathbf{p}^*$ korlátos, a görbe ellipszis.

Ha $4k = 1$, akkor $w^*$ nem vált előjelet. A görbe nem korlátos, de a $(\mathbf{c}_1; \mathbf{U}, \mathbf{V})$ koordinátarendszer egyik síknegyedében marad. A görbe parabola. A $\mathbf{p}^*(t_1) - \mathbf{c}_1$ irány a parabola tengelyének az irányát adja.

Ha $4k < 1$, akkor két valós gyök van, $w(t)^*$ előjelet vált, a görbe nem korlátos, és a $(\mathbf{c}_1; \mathbf{U}, \mathbf{V})$ koordinátarendszer két síknegyedében foglal helyet. A görbe hiperbola. A $\mathbf{p}^*(t_i) - \mathbf{c}_1$ irányok az aszimptoták irányába mutatnak.

**3.13.1. Példa.** *Egy fontos speciális eset: legyen* $|\mathbf{U}| = |\mathbf{c}_0 - \mathbf{c}_1| = |\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_1| = |\mathbf{V}|$, $w_0 = w_2 = 1$ *és* $w_1 = \sin\theta$ *ahol* $2\theta$ *az* $\mathbf{U}$ *és* $\mathbf{V}$ *által bezárt szög. Ekkor a görbénk kör.*

*Például a negyedkörívet megadhatjuk a következő formában:*

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\mathbf{c}_0 w_0 (1-t)^2 + 2\mathbf{c}_1 w_1 t(1-t) + \mathbf{c}_2 w_2 t^2}{w_0(1-t)^2 + 2w_1 t(1-t) + w_2 t^2}$$

*ahol* $\{\mathbf{c}_i\} = \{(1,0),(1,1),(0,1)\}$ *és*

$$\{w_i\} = \left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right\}$$

**Megjegyzés.** A fentiekben főként [Lee87]-t követtem. Bővebben ld. [Far94]-t.

# Fejezet 4

# B-spline-ok

## 4.1 Polinomiális spline függvények

Ha számítógépben (tér- vagy sík)görbét, illetve felületet akarunk reprezentálni, akkor a legtermészetesebbnek a polinomok, illetve racionális törtfüggvények használata tűnik. Egyrészt az együtthatóik segítségével könnyű őket tárolni, kiszámításukhoz csak a négy alapművelet szükséges, amikkel a computer is rendelkezik (a számítógépre jellemző, adott pontossággal). Másrészt ez a függvénycsalád elég gazdag ahhoz, hogy lényegében tetszőleges, a gyakorlatban előforduló alakot, adott tűrésen belül, jól le lehessen írni velük (ld. Weierstrass tételét).

Ezen függvények használatának azonban van néhány hátránya is.

- Ha az alakzat elég bonyolult, akkor a leírásához relatíve magasfokú polinomra ill. racionális törtfüggvényre van szükség, ami azt jelenti, hogy a görbe vagy felület egy pontban való kiszámítása sok műveletet igényel.
- Ha egy polinomiális vagy racionális görbe vagy felület egy kis részét megváltoztatjuk, akkor az egész görbe ill. felület megváltozik.
- Bizonyos, a műszaki gyakorlatban fontos görbék, felületek nem írhatók le racionális törtfüggvényekkel, pl. egy olyan görbe, amely egy egyenes szakaszból és egy hozzá simán kapcsolódó körívből áll.

A fentiek szükségessé teszik a modellezésre használt függvényeink családjának kibővítését szakaszonként polinomiális, ill. szakaszonként racionális törtfüggvényekkel. Ezek használatával a fenti hiányosságok lényegében megszüntethetőek. Így például, ha bonyolult alakzat leírásához nem egy magasfokú polinomot, hanem egy olyan függvényt használunk, ami több részből áll, és ezek a részek mondjuk harmadfokú polinomok, akkor ennek a függvénynek egy adott pontban való kiszámításához elegendő három szorzás.

Mivel általában a modellezendő görbe (felület) valamilyen értelemben sima, gondoskodnunk kell róla, hogy az egymáshoz csatlakozó görbe (felület) részek is megfelelő rendben kapcsolódjanak egymáshoz. Az alábbiakban ennek a mechanizmusnak a természetét tanulmányozzuk.
Általában egy szakaszonként polinomokból álló függvényt **polinomiális spline** függvénynek nevezünk. A leggyakrabban használt speciális eset (amit sokan azonosítanak a polinomiális spline-nal) a következő függvényosztály.

Legyen adott a számegyenes egy véges vagy végtelen felosztása egy szigorúan monoton növő számsorozat segítségével: $\mathbf{T}^* = \{t_i^*\}_{i=1}^s$, illetve $\mathbf{T}^* = \{t_i^*\}_{i=-\infty}^{\infty}$. Ha a számsorozat végtelen, akkor feltételül szabjuk, hogy $|t_i^*| \to \infty$ ha $i \to \pm\infty$. Most legyen $r$ egy adott természetes szám és minden $t_i^*$ ponthoz rendeljünk hozzá egy $0 \le m_i < r$ egész számot. A legfeljebb $k$-ad fokú polinomok halmazát jelöljük $\Pi_k$-val. Definiáljuk az alábbi függvényteret:

$$\mathcal{S}_r(\mathbf{T}^*) = \left\{ s \,:\, s|_{[t_i^*, t_{i+1}^*]} = s_i \in \Pi_{r-1},\ \text{és } s_i^{(j)}(t_{i+1}^*) = s_{i+1}^{(j)}(t_{i+1}^*) \quad (j = 0, \ldots, m_i - 1) \right\}.$$

**Megjegyzés.** A fenti formulában ha $m_i = 0$, akkor a függvény szakad, ha $m_i > 0$, akkor a függvény a $t_i^*$ pont elég kis környezetében $C^{m_i-1}$-beli.

**4.1.1. Definíció.** *Az $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}^*)$ függvénytér elemeit* $r$**-edrendű (polinomiális) spline függvény**-*eknek nevezzük.*

**Megjegyzés.** A későbbiekben az $m_i$ helyett sokszor a $k_i = r - m_i$ ún. **defekt** értékekkel definiáljuk az $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}^*)$ teret.

Legyen $I = [a, b]$ egy tetszőleges olyan intervallum, hogy $a$ és $b$ nem eleme $\mathbf{T}^*$-nak, $\mathcal{R}(I)$ az $I$-n értelmezett valós függvények tere, és

$$\mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*) := \{s \in \mathcal{R}(I) \,:\, \exists \hat{s} \in \mathcal{S}_r(\mathbf{T}^*),\, \hat{s}|_I = s\}\,.$$

Mint láttuk, a polinomiális görbéknél nagyon fontos volt egy megfelelő bázis - a Bernstein polinomok - megválasztása. A spline függvények használatában is nagy szerepe van egy alkalmas $\{S_i\}$ bázisnak.

**4.1.2. Definíció.** *Tegyük fel, hogy adott egy $\{S_i\}$ bázisa az $\mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*)$ térnek. Ha egy tetszőleges $S \in \mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*)$ spline függvényt $S = \sum_i a_i S_i$ formában írunk fel, akkor - mivel az előállítás egyértelmű - az $a_i = a_i(S)$ hozzárendelést egy lineáris funkcionálnak tekinthetjük, s az $\{S_i\}$ bázishoz tartozó* **duális funkcionál***nak (vagy* **duális bázis***nak) nevezzük.*

Világos, hogy

$$a_i(S_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A következőkben két bázisát is vizsgáljuk az $\mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*)$ térnek. Azegyiket a következő ttelben, a másikat pedig a következő alfejezetben.

**4.1.3. Tétel.** *Ha $I = [a, b]$ egy véges intervallum, $I \cap \mathbf{T}^* = \{t_i^*\}_{i=1}^s$, akkor az*

$$S_j(x) := \frac{(x-a)^j}{j!}, \qquad j = 0, \dots, r-1, \tag{4.1}$$

$$S_{ij}(x) := \frac{(x-t_i^*)_+^j}{j!}, \qquad j = m_i, \dots, r-1, \quad i = 1, \dots, s \tag{4.2}$$

*függvények az $\mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*)$ tér egy bázisát alkotják, és a megfelelő duális funkcionálok pedig:*

$$a_j(S) := S^{(j)}(a), \qquad j = 0, \dots, r-1, \tag{4.3}$$

$$a_{ij}(S) := S^{(j)}(t_i^*+) - S^{(j)}(t_i^*-), \qquad j = m_i, \dots, r-1, \quad i = 1, \dots, s. \tag{4.4}$$

*Továbbá*

$$\dim \mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*) = n + r, \qquad n := \sum_{i=1}^s k_i.$$

**Megjegyzés.** $f(x+)$, ill. $f(x-)$ (szokás szerint) az $f$ függvény jobboldali, ill. baloldali határértékét jelentik az $x$ helyen.

**Bizonyítás.** Legyen $S \in \mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*)$. Ha $a_{ij}(S) = 0$, $j = r - k_i, \dots, r-1$, $i = 1, \dots, s$, akkor $S, \dots, S^{(r-1)}$ minden $t_i^*$ pontban folytonos, így $S^{(r-1)}$ konstans. Tehát $S$ egy legfeljebb $r-1$-edfokú polinom. Ha még $a_j(S) = 0$, $j = 0, \dots, r-1$, akkor $S$ azonosan 0.

Így általában egy $S \in \mathcal{S}_r(I, \mathbf{T}^*)$ spline-függvény

$$S(x) = P_{r-1}(x) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij}(x - t_i^*)_+^{r-j} \tag{4.5}$$

alakban állítható elő. Az állítás többi része nyilvánvaló. ■

## 4.2 B-spline-ok

**4.2.1. Definíció.** *Tekintsük egy $f(x)$ függvény értelmezési tartományának azt a részét, melyre $f(x) \neq 0$. Ennek a halmaznak a lezártját az $f(x)$ függvény* **tartó***jának (support) nevezzük.*

Az előző részben talált bázis nagyon egyszerű, de gyakorlati számításokra nem igazán alkalmas. Ennek elsősorban az az oka, hogy a báziselemek tartója túl nagy.

A következőkben egy másik bázist fogunk előállítani. Többek között látni fogjuk, hogy ez a bázis olyan, hogy az elemeinek a tartója minimális.

**4.2.2. Definíció.** *Legyen $X = (x_0, \ldots, x_r)$ egy olyan számsorozat melyre $x_{i-1} \leq x_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ és $x_0 < x_r$. Ekkor az $X$* **knot***okhoz (csomópontokhoz) tartozó $M$* **B-spline***nak hívjuk az*

$$M(x) := M(x; x_0, \ldots, x_r) := r[x_0, \ldots, x_r](\cdot - x)_+^{r-1}$$

*függvényt.*

**Megjegyzés.** Ha $x_0 < x_1 = \cdots = x_r$, illetve ha $x_0 = \cdots = x_{r-1} < x_r$, akkor a fenti definíció alapján $M(x)$ az $x_r$, illetve az $x_0$ pontban nincs értelmezve (mint majd később látni fogjuk, ott $M(x)$-nek szakadása van). Hogy $M(x)$ mindenütt értelmezve legyen, azt a konvenciót fogjuk használni, hogy

$$M(x_r) := \lim_{x \to x_r +} M(x), \qquad \text{illetve} \qquad M(x_0) := \lim_{x \to x_0 +} M(x).$$

Az osztott differenciák tárgyalásakor, (3.5)-nál láttuk, hogy egy $f \in C^r$ függvény esetén

$$[x_0, \ldots, x_r]f = \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t) M(t) dt.$$

Az $f(t)$ függvény helyére $t^r$-t helyettesítve kapjuk:

**4.2.3. Tétel.**

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(t) dt = 1.$$

■

Mikor $r = 1$ és $x_0 \neq x_1$, akkor

$$M(x; x_0, x_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1 - x_0} & \text{ha } x \in [x_0, x_1), \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A B-spline-ok kiszámítására még abban az esetben is mikor valamennyi $x_i$ különböző, az osztott differencia képzés alkalmatlan, mivel nagyon instabil. Ezért nagyon fontos a következő tétel, ami lényegében egy új definíciót ad a B-spline-okra.

**4.2.4. Tétel. (de Boor és Cox)** *Ha $r \geq 2$, akkor*

$$M(x; x_0, \ldots, x_r) = \frac{r}{r-1} \left[ \frac{x - x_0}{x_r - x_0} M(x; x_0, \ldots, x_{r-1}) + \frac{x_r - x}{x_r - x_0} M(x; x_1, \ldots, x_r) \right]. \tag{4.6}$$

**Bizonyítás.** Alkalmazzuk az osztott differenciákra vonatkozó Leibniz formulát, azaz (3.4)-et a $(\cdot - x)(\cdot - x)_+^{r-2}$ függvényre. Kapjuk, hogy

$$M(x; x_0, \ldots, x_r) = r(x_0 - x)[x_0, \ldots, x_r](\cdot - x)_+^{r-2} + r[x_1, \ldots, x_r](\cdot - x)_+^{r-2}.$$

A (3.3) formula alapján az első tag az alábbi értékkel egyenlő

$$\frac{r}{r-1}\frac{x_0-x}{x_r-x_0}\left[M(x;x_1,\dots,x_r)-M(x;x_0,\dots,x_{r-1})\right],$$

míg a második a definíció szerint

$$\frac{r}{r-1}M(x;x_1,\dots,x_r).$$

Ebből már (4.6) következik. ■

Vezessük be a következő jelölést:

**4.2.5. Jelölés.**

$$f(x)\sim g(x)$$

*azt jelenti, hogy léteznek, olyan $A$ és $B$ pozitív konstansok, hogy*

$$A\,f(x)\le g(x)\le B\,f(x)$$

*azaz a két függvény nagyságrendje azonos.*

A B-spline-ok alakjára kapjuk a következő tételt.

**4.2.6. Tétel.** *Ha $x_0<x_r$, akkor*

*1.*

$$M(x)>0,\quad x\in(x_0,x_r);\quad M(x)=0\quad x\notin[x_0,x_r]$$

*2.*

$$\begin{cases} M(x)\sim(x-x_0)^{r-k_0} & \text{ha } x\to x_0+,\\ M(x)\sim(x-x_r)^{r-k_r} & \text{ha } x\to x_r-.\end{cases}$$

**Bizonyítás.** Az állítás indukcióval következik a de Boor - Cox rekurzióból. ■

Az $M$ B-spline úgy volt normalizálva, hogy az integrálja 1 legyen. Egy fontos másik normalizálás a következő

**4.2.7. Definíció.**

$$N(x;x_0,\dots,x_r):=\frac{1}{r}(x_r-x_0)M(x;x_0,\dots,x_r) \tag{4.7}$$

$$=(x_r-x_0)[x_0,\dots,x_r](\cdot-x)_+^{r-1} \tag{4.8}$$

**4.2.8. Következmény.**

$$N(x;x_0,\dots,x_r)=\frac{x-x_0}{x_{r-1}-x_0}N(x;x_0,\dots,x_{r-1})+\frac{x_r-x}{x_r-x_1}N(x;x_1,\dots,x_r) \tag{4.9}$$

Ha $r=1$, akkor a B-spline különösen egyszerű:

$$N(x;x_0,x_1)=\begin{cases}1 & \text{ha } x_0\le x<x_1,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

**4.2.9. Tétel.** *Tegyük fel, hogy* $x_0 < x_1 = \cdots = x_r$. *Ekkor*

$$N(x; x_0, \ldots, x_r) = \begin{cases} \left(\dfrac{x - x_0}{x_r - x_0}\right)^{r-1}, & \text{ha } x_0 \le x < x_r \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

*Hasonlóan, ha* $x_0 = \cdots = x_{r-1} < x_r$, *akkor*

$$N(x; x_0, \ldots, x_r) = \begin{cases} \left(\dfrac{x_r - x}{x_r - x_0}\right)^{r-1}, & \text{ha } x_0 \le x < x_r \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**Bizonyítás.** Nyilván elegendő azt az esetet vizsgálni, mikor $x_0 < x_1 = \cdots = x_r$, és azt is csak akkor, ha $x_0 < x < x_1$. Közvetlen számolással adódik a definíció, valamint a (3.2) és (3.3) formula ismételt alkalmazásából:

$$\begin{aligned} N(x; x_0, \ldots, x_r) &= (x_1 - x_0) \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} \frac{1}{(x_1 - x_0)^j} \binom{r-1}{r-j} (x_1 - x)^{j-1} \\ &= \left(1 - \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}\right)^{r-1}, \end{aligned}$$

ami az állítást adja. ■

**Megjegyzés.** Világos, hogy fenti összefüggések segítségével rekurzióval tetszőleges knot eloszlás esetén egyszerűen kiszámíthatjuk a B-spline függvényeket.

A B-spline függvény deriváltját is kiszámíthatjuk rekurzióval:

**4.2.10. Tétel.**

$$N'(x; x_0, \ldots, x_r) = (r-1) \left( \frac{N(x; x_0, \ldots, x_{r-1})}{x_{r-1} - x_0} - \frac{N(x; x_1, \ldots, x_r)}{x_r - x_1} \right).$$

**Bizonyítás.** Világos, hogy a differenciálás és osztott differencia képzés egymással felcserélhetőek. Továbbá általában igaz, hogy $(x_r - x_0)[x_0, \ldots, x_r]f = [x_1, \ldots, x_r]f - [x_0, , \ldots, x_{r-1}]f$. Így

$$N'(x; x_0, \ldots, x_r) = -(r-1) \left( [x_1, \ldots, x_r] - [x_0, , \ldots, x_{r-1}] \right) (\cdot - x)_+^{r-2},$$

ahonnan definíció szerint következik az állítás. ■

## 4.3 B-spline sorok

Most megváltoztatjuk a spline függvények $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}^*)$ terének a jelölését. Legyen $\mathbf{T}^* = \{t_i^*\}$ a csomópontok halmaza, és $\mathbf{k} = \{k_i\}$ a csomópontokhoz tartozó defektek. Minden $t_i^*$-ot ismételjünk $k_i$-szer, így kapunk egy (nem szigorúan) monoton növekvő $\mathbf{T} = \{t_i\}$ sorozatot. (A továbbiakban azt a terminológiát használjuk, hogy a $t_i$ pontnak $k_i$-szeres *multiplicitása* van.) Ezt a $\mathbf{T}$ sorozatot a spline tér alapcsomópontjainak (*basic knots*) hívjuk, és a teret $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$-val jelöljük, ahol $A$ véges vagy végtelen intervallum. Ha $A = \mathbb{R}$, akkor ha $|i| \to \infty$, akkor $|t_i| \to \infty$, és (mivel $k_i \le r$) minden $i$-re fennáll, hogy

$$t_i < t_{i+r}.$$

Ha $A = [a, b]$, akkor szükségünk lesz a következő segéd knotokra: $t_{-r+1} \le \cdots \le t_0 \le a$, és $b \le t_{n+1} \le \cdots \le t_{n+r}$, ahol $n$ az eredeti $t_i$-k száma.

Definíció szerint $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$ olyan függvényekből áll, amelyek az alap knotok között legfeljebb $r-1$-edfokú polinomok és minden $t_i$ alap knotban folytonosan differenciálható $r - k_i - 1$ rendben. Az alap knotok a teret teljes mértékben meghatározzák, a külső knotokra csak a B-spline bázis konstruálásához lesz szükség.

**Megjegyzés.** A gyakorlatban szokásos konvenció a $t_{-r+1} = \cdots = t_0 = a$, $b = t_{n+1} = \cdots = t_{n+r}$ választás.

Egy adott $\mathbf{T}$ knot sorozathoz az alábbi B-spline-ok tartoznak

$$N_j(x) := N_j^r(x) := N_j^r(x, \mathbf{T}) := N_j^r(x; t_j, \ldots, t_{j+r}) \qquad j \in J,$$

ahol $J$ az egész számok halmaza, ha $A = \mathbb{R}$, és $J := \{-r+1, \ldots, n\}$, ha $A = [a, b)$.

A következőkben be fogjuk látni, hogy a fenti B-spline-ok az $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$ tér egy bázisát alkotják, de előbb néhány fontos azonosságot bizonyítunk.

**4.3.1. Tétel.**

$$\sum_{j \in J} N_j(x) = 1, \qquad x \in A. \tag{4.10}$$

**Megjegyzés.** Ez a tulajdonság magyarázza az $N_j$ függvények használatát mondjuk az $M_j$-kkel szemben.

**Bizonyítás.** Definíció szerint

$$N_j(x) = ([t_{j+1}, \ldots, t_{j+r}] - [t_j, \ldots, t_{j+r-1}])\,(\cdot - x)_+^{r-1}.$$

Továbbá ha $x \in A$, akkor

$$[t_{-r+1}, \ldots, t_0](\cdot - x)_+^{r-1} = 0, \qquad [t_{n+1}, \cdots, t_{n+r}](\cdot - x)_+^{r-1} = 1.$$

Az összegzéskor minden tag kiesik az első, és az utolsó kivételével és ez az állítást adja. ■

**4.3.2. Jelölés.** *Vezessük be a következő jelöléseket:* $g_{j,1}(x) := 1$, *és*

$$g_{j,r}(x) := \frac{1}{(r-1)!}(x - t_{j+1}) \ldots (x - t_{j+r-1}), \qquad r = 2, 3, \ldots$$

**4.3.3. Tétel. (Marsden azonosság)** *Ha* $t \in \mathbb{R}$, $r = 1, 2, \ldots$, *és* $s = 0, \ldots, r-1$, *akkor*

$$\frac{(t-x)^s}{s!} = \sum_{j \in J} g_{j,r}^{(r-s-1)}(t) N_j^r(x), \qquad x \in A. \tag{4.11}$$

**Bizonyítás.** Csak az $A = \mathbb{R}$ esetet bizonyítjuk.

Először lássuk be az $s = r-1$ esetet:

$$\frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} = \sum_{j \in J} g_{j,r}(t) N_j^r(x). \tag{4.12}$$

Ezt $r$-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Az $r = 1$ eset (4.10)-ból következik. Az általános esetben használjuk az $N_j^r$-re vonatkozó rekurziós formulát

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} g_{j,r}(t) N_j^r(x) &= \sum_{j \in J} g_{j,r}(t) \left( \frac{x - t_j}{t_{j+r-1} - t_j} N_j^{r-1}(x) + \frac{t_{j+r} - x}{t_{j+r} - t_{j+1}} N_{j+1}^{r-1}(x) \right) \\
&= \sum_{j \in J} \left( \frac{x - t_j}{t_{j+r-1} - t_j} g_{j,r}(t) + \frac{t_{j+r-1} - x}{t_{j+r-1} - t_j} g_{j-1,r}(t) \right) N_j^{r-1}(x) \\
&= \sum_{j \in J} \frac{t - x}{r-1} g_{j,r-1}(t) N_j^{r-1}(x)
\end{aligned}$$

ami az indukciós feltevés szerint az állítást adja. (4.11)-t pedig (4.12) $t$-re vonatkozó $(r-s-1)$-szeres differenciálásával kapjuk. ■

A Marsden azonosság segítségével tetszőleges, legfeljebb $r-1$-edfokú $P$ polinomot előállíthatunk a B-spline alapfüggvények lineáris kombinációjaként. Vegyük a polinom $t$ körüli Taylor sorfejtését és alkalmazzuk (4.11)-t:

$$P = \sum_{j\in J} c_j(P)N_j \qquad c_j(P) = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(t)P^{(\nu)}(t). \tag{4.13}$$

Vegyük észre, hogy $c_j(P)$ nem függ a $t$ pont választásától. Valóban, legyen $\tau$ egy tetszőleges másik pont. Ekkor

$$P^{(\nu)}(t) = \sum_{k=\nu}^{r-1} P^{(k)}(\tau)\frac{(t-\tau)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}.$$

Helyettesítsük be (4.13)-ba, és átrendezve kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k P^{(k)}(\tau)\sum_{\nu=0}^{k} g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(t)\frac{(\tau-t)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}.$$

A belső összeg a $g_{j,r}^{(r-i-1)}$ függvény Taylor sorfejtése, amiből az állításunk következik.

**4.3.4. Definíció.** *Legyen $S \in \mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$. de Boor - Fix funkcionálnak hívjuk az alábbi operátort*

$$\lambda_j(S) := \lambda_{j,r}(S) := \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi_j)S^{(\nu)}(\xi_j), \tag{4.14}$$

*ahol $\xi_j$ egy tetszőleges pont a $(t_j, t_{j+r}) \cap A$ intervallumból.*

**Megjegyzés.** Problémát jelenthet a fenti formula értelmezésénél, ha $\xi_j$ megegyezik egy $t_i$ knottal, ahol $t_j < t_i < t_{j+r}$. Ha $t_i$ multiplicitása $k_i$, akkor az $S^{(\nu)}(t_i)$ $(r-k_i \le \nu \le r-1)$ nem feltétlenül létezik. De ekkor $r-\nu-1 \le k_i - 1$ és $t_i$ egy $k_i$-szeres gyöke a $g_j$-nek, ezért $g^{(r-\nu-1)}(t_i) = 0$. Ennek alapján azokat a tagokat, amelyben $g^{(r-\nu-1)}(t_i) = 0$ szerepel, nullának tekintjük.

A következő tétel szerint $\lambda_j(S)$ értéke nem függ a $\xi_j$ választásától.

**4.3.5. Tétel. (de Boor - Fix)** *Ha $A = [a,b]$ vagy $A = \mathbb{R}$, akkor az $N_j$ B-spline alapfüggvények $(j \in J)$ az $\mathcal{S}_r = \mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$ tér egy bázisát alkotják, azaz minden $S \in \mathcal{S}_r$ esetén az $S(x)$ spline függvényt egyértelműen felírhatjuk*

$$S(x) = \sum_{j\in J} a_j N_j(x), \qquad x \in A \tag{4.15}$$

*alakban és $a_j = \lambda_j(S)$.*

**Bizonyítás.** Mivel az $A = \mathbb{R}$ eset következik a véges intervallum esetéből, ezért feltesszük, hogy $A = [a,b]$. A tételt nyilván elegendő az $\mathcal{S}_r$ tér egy bázisára bebizonyítani. Mivel a legfeljebb $(r-1)$-edfokú polinomokra már láttuk, ezért elegendő most csak az $S_1(x) := (x-t_i)_+^{r-k}$ függvényt nézni, ahol $t_i$ egy legalább $k$-szoros multiplicitású knot.

Először belátjuk, hogy ha $P(x) = (x-t_i)^{r-k}$, akkor $t_j < t_i < t_{j+r}$ esetén $\lambda_j(P) = 0$. Valóban, ha a (4.13)-ban $t$ helyére $t_i$-t írunk, akkor — mivel $t_i$ $g_j$-nek legalább $k$-szoros és $P(x)$-nek pedig $(r-k)$-szoros gyöke — minden tag 0 lesz.

Innen következik, hogy $\lambda_j(S_1) = 0$ valahányszor $t_j < t_i < t_{j+r}$. Tudniillik, ha $\xi_j > t_i$, akkor minden (4.14)-beli $S_1^{(\nu)}(\xi_j) = P^{(\nu)}(\xi_j)$, és így $\lambda_j(S_1) = \lambda_j(P) = 0$. Ha $\xi_j < t_i$, akkor pedig a függvény és persze a deriváltjai is nullák lesznek, tehát $\lambda_j(S_1)$ is. Folytonosság révén ez következik $\xi_j = t_i$-ra is.

Nyilván a (4.15) összegben csak azok az együtthatók az érdekesek, ahol $N_i(x) \neq 0$. Ha $x < t_i$, akkor az ilyen együtthatók mind nullák: vagy $t_j < t_i < t_{j+r}$, s erre az esetre $\lambda_j(S_1) = \lambda_j(P) = 0$, vagy pedig $t_{j+r} \leq t_i$ s ekkor minden szóbajöhető $\xi_j$ értékre $S_1^{(\nu)}(\xi_j) = 0$. Azaz $x < t_i$ esetén

$$\sum_{j \in J} \lambda_j(S_1) N_j(x) = S_1(x) = 0.$$

Ha pedig $x > t_i$, akkor minden szóbajöhető együttható megegyezik $\lambda_j(P)$-vel, azaz ekkor

$$\sum_{j \in J} \lambda_j(S_1) N_j(x) = \sum_{j \in J} \lambda_j(P) N_j(x) = P(x).$$

Ha $k < r$, azaz $S_1$ folytonos, akkor folytonosság miatt az állítás igaz $x = t_i$-re is.

Az előállítás egyértelműsége abból következik, hogy az $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$ tér dimenziója, azaz $n + r$ megegyezik az $N_j$ függvények számával. ∎

**4.3.6. Következmény. (Curry - Schoenberg)** *Az $\{N_j^r\}_{j \in J}$ B-spline-ok az $\mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$ tér egy bázisát alkotják.*

**Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy a de Boor - Fix funkcionálok egy duális bázist alkotnak:

$$\lambda_j(N_i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**4.3.7. Tétel.** *Ha $S \in \mathcal{S}_r(\mathbf{T}, A)$, $S \not\equiv 0$ olyan, hogy egy véges $I$ intervallumon kívül azonosan 0, akkor $I$ legalább $r + 1$ knotot tartalmaz.*

**Bizonyítás.** Ha $I$ olyan lenne, hogy $r + 1$ knotnál kevesebbet tartalmazna, akkor a $\lambda_j(S)$ definíciójában szereplő $\xi_j$ értékeket úgy lehetne választani, hogy mindegyik az $I$ intervallumon kívülre kerüljön. De ekkor a feltétel szerint $\lambda_j(S) = 0$ lenne minden $j$-re, ami ellentmondás. ∎

**4.3.8. Következmény.** *Az $\{N_j^r\}_{j \in J}$ bázis olyan, amelynél az alapfüggvények tartója minimális.*

A B-spline alapfüggvények deriváltjára vonatkozó formula alapján könnyen következik

**4.3.9. Tétel.** *Valahányszor $x$ nem egyezik meg egy olyan knottal, amelynek a multiplicitása nagyobb, mint $r - 3$, akkor*

$$S'(x) = (r - 1) \sum_{j \in J} \frac{a_j - a_{j-1}}{t_{j+r-1} - t_j} N_j^{r-1}(x)$$

∎

**Megjegyzés.** A fenti formula nagyon emlékeztet arra, amit a Bézier polinomok deriválásakor kaptunk. Ez nem véletlen, igaz ugyanis, hogy ha $x \in [0, 1)$, akkor

$$N^r(x; \underbrace{0, \ldots, 0}_{r-k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k+1}) = b_{r-1,k}(x) \qquad (k = 0, \ldots, r - 1) \tag{4.16}$$

azaz a Bernstein alappolinomok tekinthetőek a B-spline-ok egy speciális esetének. Ez közvetlenül következik abból, hogy a fenti knotok esetén a Bernstein alappolinomok kielégítik a (4.9) rekurziós formulát.

**Megjegyzés.** Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az előző megjegyzésünkben a $[0, 1)$ intervallumra szorítkoztunk. Az $x = 1$ pontban mind a B-spline alapfüggvények, mind pedig a Bernstein alappolinomok 0-k egy kivétellel. Természetesen $b_{r-1,r-1}(1) = 1$, de $N^r(x; 0, 1, \ldots, 1)$ az $x = 1$ pontban szakad, és a 4.2 Megjegyzés szerint így ott 0.

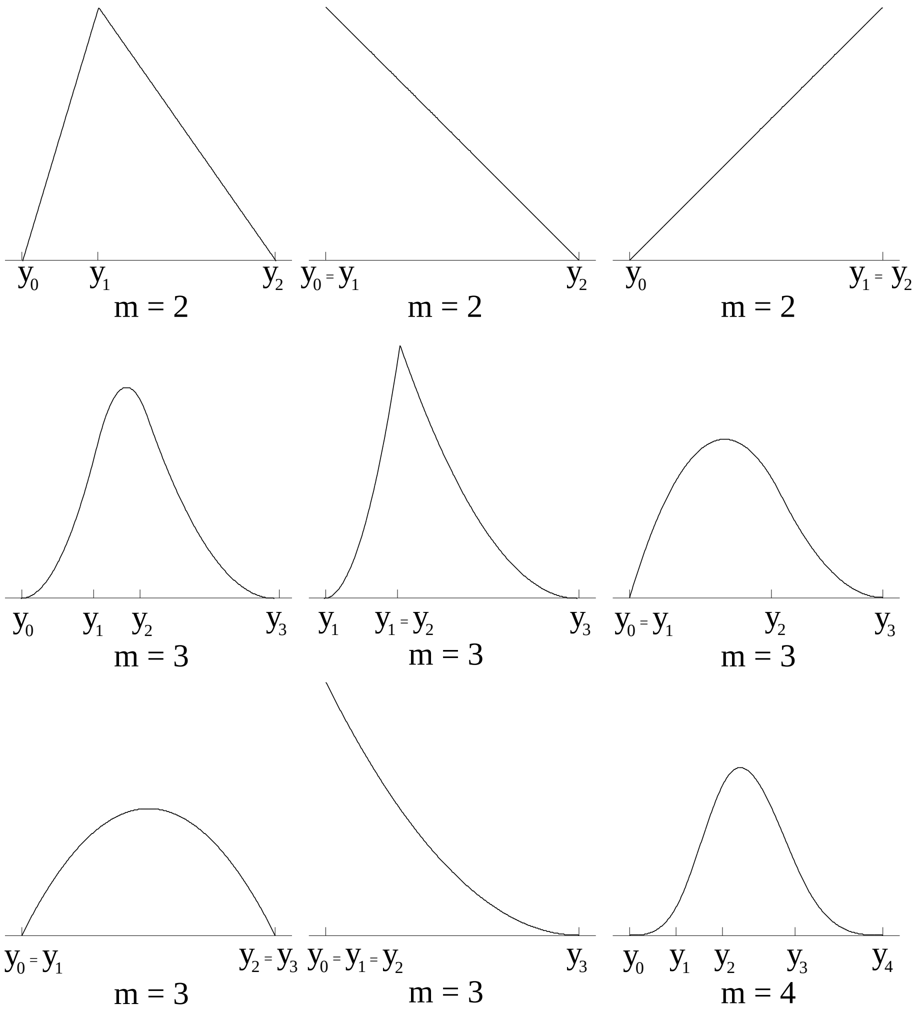


Figure 4.1: Néhány B-spline alapfüggvény alakja

## 4.4 Algoritmusok

Idáig csak a spline függvényekkel foglalkoztunk. A Bézier görbékhez hasonlóan, ha az együtthatóknak térbeli vektorokat választunk, akkor parametrikus térgörbéhez jutunk. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban is csak függvényekre mondjuk ki az állításokat, de ezek minden további nélkül érvényesek parametrikus görbékre is. A következőkben a B-spline-okra vonatkozó három fontos algoritmust ismertetünk.

A B-spline-okra vonatkozó (4.9) rekurziót az alábbi formában is írhatjuk:

$$N_i^r(x) = \omega_{i,r}(x) N_i^{r-1}(x) + \left(1 - \omega_{i+1,r}(x)\right) N_{i+1}^{r-1}(x),$$

ahol

$$\omega_{i,r}(x) = \frac{x - t_i}{t_{r+i-1} - t_i}.$$

Ekkor

$$S = \sum_i a_i N_i^r = \sum_i ((1 - \omega_{i,r}) a_{i-1} + \omega_{i,r} a_i) N_i^{r-1} =: \sum_i a_i^{\{1\}} N_i^{r-1}.$$

$r - 1$ iteráció után kapjuk: $S = \sum_i a_i^{\{r-1\}} N_i^1$. Így definíció szerint, ha $t \in [t_j, t_{j+1})$, akkor $S = a_j^{\{r-1\}}$. Vagyis a következő algoritmust kaptuk:

**4.4.1. Algoritmus. (de Boor - Cox algoritmus)** *Legyen $t \in [t_j, t_{j+1})$, és legyenek adottak az $a_i^{\{0\}} = a_i$ kontrollpontok. Ekkor a spline t-beli értékét, azaz az $a_j^{\{r-1\}}$-t az alábbi rekurziós formula szolgáltatja:*

$$a_i^{k+1} := (1 - \omega_{i,r-k})a_{i-1}^{\{k\}} + \omega_{i,r-k}a_i^{\{k\}} \qquad (j + k - r + 1 < i \leq j).$$

**4.4.2. Következmény.** *A $\sum_{j \in J} \mathbf{a}_j N_j(t)$ spline görbe $t \in [t_l, t_{l+1})$-beli pontja az $\mathbf{a}_{l-r+1}, \ldots, \mathbf{a}_l$ kontrollpontok konvex burkában van.*

Tekintsük az ún. **knot insertion** (azaz knot beszúrási) problémát. Tegyük fel, hogy adott egy knot sorozat $\mathbf{t}$ és hozzáveszünk egy új knotot, amit nevezzünk $\hat{t}$-nek. Így kapunk egy finomított knot sorozatot, $\hat{\mathbf{t}}$-t. Az előzőek szerint egy $S = \sum a_i N_i^r$ spline függvényt felírhatunk a finomított knotok szerint $\sum \hat{a}_i \hat{N}_i^j$ alakban. Kérdés, hogy írhatjuk fel $\hat{a}_i$-t a régi kontrollpontok segítségével ? Ehhez vizsgáljuk meg $\hat{\lambda}_{i,r}$-t, ehhez pedig $\hat{g}_{i,r}$-t. Nyilván ha $t_{i+r-1} \leq \hat{t}$, akkor $\hat{g}_{i,r} = g_{i,r}$, ha pedig $\hat{t} \leq t_i$, akkor $\hat{g}_{i,r} = g_{i-1,r}$. A maradék $t_i < \hat{t} < t_{i+r-1}$ esetben könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned}\hat{g}_{i,r}(t) &= \frac{1}{(r-1)!}(t_{i+1} - t) \ldots (t_{i+r-2} - t) \left[\omega_{i,r}(\hat{t})(t_{i+r-1} - t) + (1 - \omega_{i,r}(\hat{t}))(t_i - t)\right] \\ &= \omega_{i,r}(\hat{t})g_{i,r}(t) + (1 - \omega_{i,r}(\hat{t}))g_{i-1,r}(t).\end{aligned}$$

Ebből következik

**4.4.3. Algoritmus. (Boehm knot-insertion algoritmus)** *Ha a $\hat{\mathbf{t}}$ knot vektort a $\mathbf{t}$ knot vektorból kapjuk a $\hat{t}$ knot hozzávételével, akkor a finomított kontrollpontokat a következő képlettel határozhatjuk meg:*

$$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i & \text{ha } t_{i+r-1} \leq \hat{t}, \\ \omega_{i,r}(\hat{t})a_i + (1 - \omega_{i,r}(\hat{t}))a_{i-1} & \text{ha } t_i < \hat{t} < t_{i+r-1}, \\ a_{i-1} & \text{ha } \hat{t} \leq t_i. \end{cases}$$

Ha összehasonlítjuk az első algoritmust a harmadikkal, akkor észrevehetjük, hogy lényegében azonos algoritmusról van szó, azaz ismételt knot beszúrással is kiértékelhetjük a spline-t.

**4.4.4. Következmény.** *A B-spline-ok is rendelkeznek a Variation Diminishing (változás nem csökkentő) tulajdonsággal.*

**Megjegyzés.** A B-spline-ok általános elméletét nagyon sok könyv tárgyalja. Mi itt főként [DL91]-et követtük. Legjobb talán [dB78] és [Sch81].

## 4.5 Spline interpoláció

Legyen most a knot-rendszerünk:

$$t_1 \leq \cdots \leq t_{n+r},$$

és feltesszük, hogy $t_i < t_{i+r}$ $(i = 1, \ldots, n)$. A következőkben mindig ilyen knot-rendszerről lesz szó, kivéve, ha ezt külön jelezzük.

Tekinsük a következő interpolációs feladatot. Adott egy $n$ darab pontból álló pontsorozat a térben

$$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n,$$

és adottak hozzájuk tartozó paraméter értékek (az ún. *node*-ok):

$$u_1 < \cdots < u_n.$$

Keressük meg azt az $\mathbf{S}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{c}_j N_j^r(t)$ spline-t, amelyre

$$\mathbf{S}(u_i) = \mathbf{P}_i \qquad (i = 0, \ldots, n).$$

Ez világos módon egy lineáris egyenletrendszer, melynek mátrixa a következő:

$$\mathcal{A} = \left(N_j^r(u_i)\right)_{i=1,j=1}^{n,n}. \tag{4.17}$$

Kérdés, mikor oldható meg ez az interpolációs feladat tetszőleges $\mathbf{P}_i$ értékekre? Erről szól a következő tétel, amit nem bizonyítunk. (Bizonyítását ld. pl. [dB78], [dBD85].)

**4.5.1. Tétel. (Schoenberg - Whitney)** *A fenti egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg tetszőleges $\mathbf{P}_i$-k esetén, ha*

$$u_i \in \mathrm{supp} N_i^r = [t_i, t_{i+r}) \qquad (i = 1, \dots, n). \qquad \blacksquare$$

**4.5.2. Definíció.** *Tekintsünk egy $\mathcal{M} = (m_{ij})_{i=1,j=1}^{m,n}$ mátrixot, és legyen $I : i_1 < \cdots < i_k$ a sorindexek, $J : j_1 < \cdots < j_k$ pedig az oszlopindexek egy része. Tekinsük a $M(I, J) = (m_{ij})_{i \in I, j \in J}$ részmátrixot (ami természetesen négyzetes mátrix). Egy $\mathcal{M}$ mátrixot* **totálisan pozitív***nak hívnak, ha minden $M(I, J)$ részmátrixának a determinánsa nemnegatív.*

**Megjegyzés.** A totálisan pozitív mátrixok sok jó tulajdonsággal rendelkeznek. Pl. deBoor és Pinkus bebizonyította ([dBP77]), hogy egy olyan lineáris egyenletrendszert, ahol az egyenletrendszer mátrixa totálisan pozitív, Gauss eliminációval főelemkiválasztás nélkül is stabilan meg lehet oldani. Karlin bebizonyította ([Kar68]), hogy ha a spline interpolációban minden alappont különböző, akkor (4.17) mátrix totálisan pozitív, ld. még ([dBD85]).

Gyakori node választás:

$$u_i = \frac{1}{r-1} \sum_{j=i+1}^{i+r-1} t_j \qquad (i = 1, \dots, n)$$

az úgynevezett *Greville abszcisszák*. Ezekre teljesül a Schoenberg - Whitney tétel feltétele. Ezenfelül fent láttuk, hogy ezekben a pontokban vett interpoláció a lineáris polinomokat reprodukálja.

Másik gyakori node választás az $u_i = t_{k+i-1}$. Világos, hogy a Schoenberg - Whitney tétel most is teljesül.

Mindkét esetben a megoldás nem egyértelmű: van kihasználatlan szabadságfok, azaz lekötetlen szabad változó. Ezeket általában a végpontban további adatok (derivált, stb.) segítségével határozzuk meg. Lásd részletesebben a harmadfokú esetet.

## 4.6 Cubic spline-ok

A polinomiális spline függvények közül legtöbbször a cubic (harmadfokú, azaz negyedrendű) spline-okat használjuk. Ezek egyrészt elég egyszerűek (szakaszonként harmadfokú polinomok), másrészt elég simák (kétszer folytonosan differenciálhatóak, így egyben görbületfolytonosak is).

### 4.6.1 Interpoláció

Tekintsük a következő interpolációs problémát. Adott $n + 1$ pont (a síkban vagy a térben): $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n$. Minden $\mathbf{P}_k$ ponthoz rendeljünk egy $t_k$ paraméter értéket az $[a, b]$ intervallumból:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Határozzuk meg azt az $\mathbf{s}(t)$ cubic spline-t, amelynek a knotjai a $t_k$-k és $\mathbf{s}(t_k) = \mathbf{P}_k$. (Azaz most a knotok egybeesnek a node-okkal.) Használjuk a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} I_k &= [t_{k-1}, t_k] \\ \Delta_k &= t_k - t_{k-1}, \\ \mathbf{s}_k\left(\frac{t - t_{k-1}}{\Delta_k}\right) &= \mathbf{s}(t), \qquad \text{ha } t \in I_k, \\ \mathbf{T}_k &= \dot{\mathbf{s}}(t_k). \end{aligned}$$

A $\mathbf{s}_k(t)$ szegmens egy, a $[0,1]$ intervallumon paraméterezett harmadfokú polinom, aminek az Hermite alakja:

$$\mathbf{s}_k(t) = \mathbf{P}_{k-1} f_0(t) + \mathbf{P}_k f_1(t) + \mathbf{T}_0^k g_0(t) + \mathbf{T}_1^k g_1(t),$$

ahol $f_0$, $f_1$, $g_0$ és $g_1$ a (már korábban definiált) harmadfokú Hermit interpolációs füffvények, továbbá $\mathbf{T}_0^k$ és $\mathbf{T}_1^k$ alkalmas tangensvektorok. Mivel $\mathbf{s}$ kétszer folytonosan differenciálható, kapjuk:

$$\mathbf{T}_k = \frac{\dot{\mathbf{s}}_k(1)}{\Delta_k} = \frac{\dot{\mathbf{s}}_{k+1}(0)}{\Delta_{k+1}},$$
$$\frac{\ddot{\mathbf{s}}_k(1)}{(\Delta_k)^2} = \frac{\ddot{\mathbf{s}}_{k+1}(0)}{(\Delta_{k+1})^2}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\mathbf{T}_0^k = \Delta_k \mathbf{T}_{k-1} \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_1^k = \Delta_k \mathbf{T}_k,$$

továbbá

$$\frac{6\,(\mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_k) + 2\Delta_k(\mathbf{T}_{k-1} + 2\mathbf{T}_k)}{(\Delta_k)^2} = \frac{6\,(\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k) - 2\Delta_{k+1}(2\mathbf{T}_k + \mathbf{T}_{k+1})}{(\Delta_{k+1})^2},$$

ahol $k = 1, \ldots, n-1$. Így van egy lineáris egyenletrendszerünk, $(n+1)$ (vektor) ismeretlennel és $(n-1)$ (vektor) egyenlettel. Ez azt jelenti, hogy van két (vektor) szabadsági fokunk, amit általában a görbe végponti viselkedésének a meghatározásához használunk fel. Ha mondjuk az első és utolsó tangenst (azaz $\mathbf{T}_0$-t és $\mathbf{T}_n$-t) adottnak tekintjük, akkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\mathcal{M}\mathcal{T} = \mathcal{R}$$

ahol $\mathcal{T} = (\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{n-1})^*$ az ismeretlen tangensek, $\mathcal{M}$ az egyenletrendszer mátrixa:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2(\Delta_2+\Delta_1) & \Delta_1 & & & & \\ \Delta_3 & 2(\Delta_3+\Delta_2) & \Delta_2 & & & \\ & \Delta_4 & 2(\Delta_4+\Delta_3) & \Delta_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & \Delta_n & 2(\Delta_n+\Delta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

és az $\mathcal{R}$ $k$-adik tagja pedig

$$3\left[(\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k)\frac{\Delta_k}{\Delta_k} + (\mathbf{P}_k - \mathbf{P}_{k-1})\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}\right],$$

kivéve az első és utolsó tagot, amikor a fenti mennyiségből még ki kell vonni $\Delta_1\mathbf{T}_0$-t, illetve $\Delta_{n-1}\mathbf{T}_n$-t.

Könnyen látható, hogy az egyenlet mátrixa tridiagonális, (azaz csak a főátló és a vele szomszédos elemek nem nullák), valamint főátló domináns, azaz a főátlóban levő elemek nagyobbak, mint a velük egy sorban levő összes többi elem összege. Ebből következik, hogy egyrészt mindig invertálható, (azaz az interpolációnak mindig pontosan egy megoldása van), másrészt pedig ha mondjuk Gauss eliminációval oldjuk meg az egyenletet, akkor nem kell főelemkiválasztás.

Ha a görbét zárt görbének tekintjük (azaz $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_n$, és előírjuk, hogy itt is legyen kétszer differenciálható), akkor a fenti egyenletrendszert még a $k = n$-ben is megköveteljük (az indexeket modulo $n$ véve).

Ekkor mind az ismeretlenek, mind pedig az egyenletek száma $n$, azaz nincs szabad paraméter.

### 4.6.2 Végponti feltételek

Mindkét végpontban tetszőleges módon előírhatunk egy-egy feltételt. Most három módszert ismertetünk.

- "Természetes" végponti feltétel: azt írjuk elő, hogy a második derivált értéke a végpontban legyen **0**, azaz a görbe az intervallumon kívül egyenes legyen.
- Második módszer: előírjuk a végpontban az első derivált vektort.

  Hogy hogyan válasszuk meg ezt a tangenst *automatikusan* az adott pontok alapján, arra több ötlet is van, pl. a *Bessel módszer*: interpoláljunk a szélső három pontra egy másodfokú polinomot s annak az első deriváltját válasszuk.
- de Boor "not-a-knot" feltétele: a hiányzó végponti egyenlet legyen az, amelyik garantálja a $t_1$ ($t_{n-1}$) pontban a *háromszori* differenciálhatóságot (azaz "eltünteti" a $t_1$ ($t_{n-1}$) knotot).

### 4.6.3 Paraméter választás

A paraméterek megválasztása a spline interpoláció legnagyobb megoldatlan problémája. Nincsen igazán jó, elméletileg megalapozott algoritmus. Mivel azonban valamit mégis kell csinálni, a gyakorlatban több, egymás mellett létező módszert használnak, többé-kevésbé próba-szerencse alapon. Ezek:

- Egyenletes paraméterezés, azaz $\Delta_k = (b-a)/n$. Ez a legegyszerűbb, legelőször használt és legrosszabb módszer. Vegyük észre, hogy itt a paraméterek választása teljesen független a pontok térben elfoglalt helyétől. Ha a $\mathbf{P}_k$ pontok eloszlása egyenletes, akkor remélhető, hogy elfogadható eredményt ad, különben nem várhatunk semmi jót tőle. (A görbe erősen hullámos lesz.)
- Húr-hossz (chord length) módszer. Most legyen $\Delta_k = |\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k|$. Ez talán a legjobban elterjedt módszer. A módszer az ívhosszat imitálja. Ez logikusnak tűnhet, bár gondoljuk meg: ha a kiindulási pontjaink egy polinom $t_0, \ldots, t_n$ paraméterbeli pontjai, akkor itt a paraméterek biztosan nem ívhossz szerint változnak. Elég megbízható, bár könnyű olyan adatokat találni, mikor ez is behullámzik.
- Centripetális módszer ([Lee89]). Itt $\Delta_k = \sqrt{|\mathbf{P}_{k+1} - \mathbf{P}_k|}$. Ez egy fizikai analógia nyomán született (innen kapta a nevét is). Hogy egy autó ne sodródjon ki a kanyarban, le kell előtte lassítani. Az erre vonatkozó fizikai modell egy approximációja alapján javasolta Lee ezt a módszert (előttem egy kicsit rejtélyes módon, mivel nem használja fel a kontrollpoligonban levő szög információt). A gyakorlatban kb. egyenlő erős az előző (azaz a húrhossz) módszerrel. Vannak pontrendszerek, melynél az egyik, s vannak, ahol a másik bizonyul jobbnak.
- Affin invariáns parametrizáció ([NF89]). Ezt és a következő pontban tárgyalt módszert is Nielson és Foley javasolta és mindkettőt csak síkgörbékre dolgozták ki.

  $\mathbf{P}_k$ pontok síkbeliek, azaz írhatjuk, hogy $\mathbf{P}_k = (x_k, y_k)$. Most a paraméter választás a következő módon történik: $\Delta_k = M(\mathbf{P}_k, \mathbf{P}_{k+1})$, ahol az $M(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ távolságfüggvényt az alábbi módon definiáljuk. Legyen

  $$\hat{x} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i, \qquad \hat{y} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i,$$

  $$\sigma_x = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \hat{x})^2, \quad \sigma_y = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(y_i - \hat{y})^2, \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y}),$$

  $$q_{11} = \frac{\sigma_y}{d}, \qquad q_{22} = \frac{\sigma_x}{d}, \qquad q_{12} = q_{21} = \frac{-\sigma_{xy}}{d}$$

  ahol $d = \sigma_x\sigma_y - (\sigma_{xy})^2$. A fenti jelölésekkel

  $$M(\mathbf{U}, \mathbf{V})^2 = (\mathbf{U} - \mathbf{V})Q(\mathbf{U} - \mathbf{V})^T$$

  ahol a mátrix $Q = \{q_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$.

- Tudomásunk szerint az ugyancsak Foley és Nielsontól származó ([FN89]) alábbi módszer az egyetlen, amely figyelembe veszi a kontrollpoligon szögeit is. Most

$$\Delta_i = d_i \left[ 1 + \frac{3\hat{\theta}_i d_{i-1}}{2(d_{i-1} + d_i)} + \frac{3\hat{\theta}_{i+1} d_{i+1}}{2(d_i + d_{i+1})} \right]$$

 ahol $d_i = M(\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_{i+1})$, $\hat{\theta}_i = \min(\theta_i, \pi/2)$ és $\theta_i$ a kontrollpoligon $\mathbf{P}_i$-nál levő szöge.

 A fenti paraméterválasztáshoz részben heurisztikával, részben pedig (egyes konstansok megválasztásánál) kísérletezéssel jutottak. A szerzők által közölt cikket szép ábrákkal illusztrálták, a legtöbb referenciakönyv beszámol róla. Fogalmam sincs, hogy hogyan működik, és hogy bárki használja-e. (Tipp: Valószínűleg tényleg jobb, mint a többi.)

**Megjegyzés.** Ha valahol az első derivált nullává válik, (azaz a görbe paraméterezése abban a pontban degenerált), akkor ott **sarok** (**corner**) vagy **csúcs** (**cusp**) jöhet létre. Corner-ről beszélünk, ha ott a görbe jobb és baloldali érintői nem párhuzamosak és cusp-ról, ha az érintők párhuzamosak ugyan, de az irányuk ellentétes. Epstein bebizonyította ([Eps76]), hogy zárt görbe esetén a húrhossz szerinti paraméterezésnél corner nem léphet fel, szemben az egyenletes paraméterezéssel.

Jelöljük $P_s$-sel azt a paraméterezést, amelynél a paraméterek közti távolság a megfelelő húrhossz $s$-edik hatványa. Így $P_0$ az egyenletes, $P_1$ a chord length és $P_{0.5}$ a centripetális paraméterezést adja. Lee bebizonyította ([Lee92]), hogy az összes $P_s$ paraméterezés közül akkor és csak akkor nincs soha corner, ha $s \in [0.5, 1]$.

Egyes szerzők úgy idézik Epstein tételét - tévesen - hogy chord length paraméterezésnél sem cusp, sem corner nem léphet fel. Lee alábbi példája mutatja (lásd 4.2 ábra), hogy cusp semmilyen $P_s$ paraméterezés esetén sem kerülhető el.

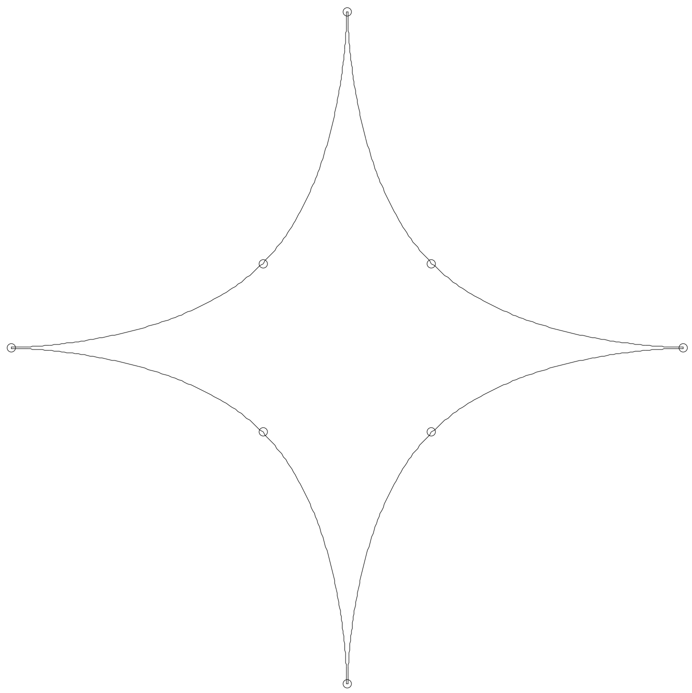

Figure 4.2: Lee ellenpéldája

## 4.7 Approximáció B-spline-okkal

### 4.7.1 Approximáció B-spline görbékkel

A probléma hasonló az interpolációs problémához, csak most a $\mathbf{P}_i$ pontok száma, amit $m$-mel jelölünk, *nagyobb*, mint a szegmensek száma, így nem lehet őket interpolálni, csak approximálni. Sokszor - például az adatok pontatlansága miatt - nem is érdemes interpolálni. Másrészt törekszünk arra, hatékonysági és egyéb megfontolásokból, hogy minél egyszerűbb, tömörebb ábrázolást találjunk. Itt csak egy technikát ismertetünk.

Tekintsünk egy, a pontokhoz tartozó $\{u_i\}$ paraméter rendszert. Ilyet kaphatunk a fent leírt módszerek valamelyikével. Szeretnénk minimalizálni a $|\mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i)|$ távolságokat, ahol

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c}_j N_j^r(t).$$

Ez nehéz feladat, s inkább az

$$f(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i))^2 \tag{4.18}$$

összeget minimalizáljuk. Ezt hívják legkisebb négyzetek (least square) módszerének. Ennek az az előnye, hogy lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\mathbf{0} = \left( \frac{\partial f}{\partial c_{j,1}}, \frac{\partial f}{\partial c_{j,2}}, \frac{\partial f}{\partial c_{j,3}} \right) = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{S}(u_i) - \mathbf{P}_i) N_j^r(u_i) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Azaz

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj} \mathbf{c}_k = \mathbf{b}_j \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

ahol

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{m} N_k^r(u_i) N_j^r(u_i)$$

és

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}_i N_j^r(u_i).$$

Vegyük észre, hogy itt az egyenletrendszer mátrixa sáv szerkezetű lesz: $a_{kj} = 0$ ha $|k - j| \geq r$, mivel ebben az esetben $N_k^r(x) N_j^r(x) = 0$ minden $x$-re.

Ezt az egyenletrendszert megoldva megkapjuk az approximáló spline-t. Általában az így kapott görbénél a paraméterek nem optimálisak, azaz a $\mathbf{P}_i$ ponthoz a görbe nem az $u_i$ pontban lesz a legközelebb. Ha a spline nem közelít elég jól, akkor a következő iterációt csinálhatjuk. Korrigáljuk a paramétereket (azaz olyan új paramétereket választhatunk, melyek közelebb vannak a pontokhoz), majd az új paraméterekkel újra számítjuk a görbét. Ezt addig folytathatjuk, míg vagy a görbe elég jól nem közelít, azaz sikerült a görbével elfogadható módon megközelíteni a pontokat, vagy pedig a paraméterek lényegében már tovább nem javíthatóak, azaz nem sikerült adott távolságon belül megközelíteni a pontokat, és már a paraméterek változtatásával ezen nem is tudunk javítani. Ekkor meg kell növelnünk $n$-et, azaz a szabad paraméterek számát.

A paraméter korrekciónak két változatát ismertetjük, mindkettőt Hoschek írta le ([HL93]) először. Ezek abban különböznek, hogy a spline-t a Taylor sorfejtésének lineáris vagy kvadratikus részével közelítik.

**Lineáris korrekció**

$$\mathbf{S}(t) \simeq \mathbf{S}(u_i) + \dot{\mathbf{S}}(u_i)\Delta u_i,$$
$$\Delta u_i := \frac{\langle \mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i), \dot{\mathbf{S}}(u_i)\rangle}{\dot{\mathbf{S}}(u_i)^2}.$$

**Kvadratikus korrekció**

Most próbáljuk minimalizálni a

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_i - \mathbf{S}(t))^2$$

függvényt. A minimumpontban a derivált nulla:

$$\dot{\varphi}_i(t) = \langle \mathbf{S}(t) - \mathbf{P}_i, \dot{\mathbf{S}}(t)\rangle = 0$$

így a Newton iterációkban szokásos

$$\dot{\varphi}_i(t) + \Delta u_i \ddot{\varphi}_i(t) \simeq 0$$

heurisztika alapján

$$\Delta u_i = -\frac{\dot{\varphi}_i(t)}{\ddot{\varphi}_i(t)} = \frac{\langle \mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i), \dot{\mathbf{S}}(u_i)\rangle}{\dot{\mathbf{S}}(u_i)^2 - \langle \mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i), \ddot{\mathbf{S}}(u_i)\rangle}.$$

**Módosított least square approximáció**

Sokszor az előző least square approximáció olyan görbét eredményez, ami ugyan közel van ugyan az adott pontokhoz, de az alakja nem kielégítő. Ezért sokszor (4.18) helyett egy alkalmas másik funkcionált minimalizálunk. Ez lehet például

$$\Phi(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{m}(\mathbf{P}_i - \mathbf{S}(u_i))^2 + \lambda \int \left(\mathbf{S}^{(q)}(t)\right)^2 dt,$$

ahol $\lambda$ egy alkalmas pozitív konstans, és például $q = 1$ vagy $2$. Vegyük észre, hogy a funkcionál továbbra is a kontrollpontok kvadratikus függvénye, azaz a deriválás után továbbra is lineáris egyenletrendszerhez jutunk.

A megfelelő $\lambda$ érték megtalálása nem könnyű feladat, általában valamilyen szisztematikus próbálgatással határozzák meg.

Az egyenletrendszer mátrixában szerepelni fognak az

$$f_{ij} := \int N_i^{r\,(q)}(t) N_j^{r\,(q)}(t)dt$$

értékek. Világos, hogy ismét ha $|i-j| \geq r$, akkor $f_{ij} = 0$. Habár $f_{ij}$ kiszámítására van pontos formula is, de az numerikusan nagyon instabil, ezért a szakirodalom a numerikus integrálást ajánlja. Mivel az integrandus szakaszonként polinom, ezért, ha az egyes szakaszonként a Gauss-Legendre kvadratúrát alkalmazzuk, akkor gyors és nagy pontosságú algoritmust kapunk ([dBLS76]).

### 4.7.2 Approximáció B-spline felületekkel

A Bézier felületekkel analóg módon definiálhatunk B-spline felületeket:

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{c}_{ij} N_i^p(u, U) N_j^q(v, V)$$

ahol $U$ és $V$ adott knotsorozatok és a $\mathbf{c}_{ij}$-k a felület kontrollpontjai.

Itt azt a problémát vizsgáljuk, hogy ha adottak valamilyen felület diszkrét pontjai (például egy mérőgép segítségével egy felületet sok pontban megmértünk), akkor hogyan találhatunk egy, a felületet jól közelítő B-spline felületet.

Ez a probléma sokkal bonyolultabb, mint a görbék esetén volt. A felület általában nagyon változatos alakú lehet, nem biztos, hogy megfelel annak a (topológiai értelemben vett) négyszögnek, ahogy a B-spline felületeket definiáltuk.

A pontok sokszor rácsszerkezetben vannak adva, de máskor csak azt tételezhetjük fel, hogy egymás után következő síkok mentén lettek lemérve, megint más esetekben pedig lehetnek teljesen rendezetlenek is. Néha adottak a határgörbék, máskor nekünk kell eldönteni, hogy mely pontok essenek a határra, és melyek a felület belsejébe.

Mi most csak azt az esetet tárgyaljuk, mikor a felületet egy alkalmas négyszög patchnek tudjuk tekinteni.

Ekkor (az általunk tárgyalt algoritmusban) a következő feladatokat kell megoldani:

1. az adatpontok paraméterezése,
2. A pontok approximációja a legkisebb négyzetek módszerével (vagy egy alkalmas módosításával),
3. a paraméterezés javítása.

**Felületpontok paraméterezése**

Ez még kevésbé egyszerű, mint görbék esetén. Ha a pontok már eleve mátrixszerűen vannak elrendezve, akkor a görbéknél megismert valamelyik módszert alkalmazhatjuk, de ha a pontok rendezetlenek, akkor más megoldást kell találnunk. A legcélszerűbbnek tűnik keresni egy alkalmas parametrikus felületet, melynek a határa megegyezik az approximálandó felület határával, s minden ponthoz az ezen felület hozzá legközelebbi pontjának a paraméterét rendeljük. Később látni fogunk módszereket, hogy hogyan lehet ilyen referenciafelületeket konstruálni (ilyen például a lineáris Coons patch, amelyet a későbbiekben fogunk tárgyalni), és hogy hogyan lehet pontot felületre vetíteni: hasonló módon, mint a felület-felület metszés fejezetben tárgyalt algoritmusoknál.

**Felület approximáció legkisebb négyzetek módszerével**

Itt két kérdést kell érintenünk, a funkcionál megválasztását és a keletkező lineáris egyenletrendszer megoldását. Az irodalomban a legkülönbözőbb módosító funkcionálok szerepelnek. Talán a legtöbbet az

$$\int\int \left(\mathbf{S}_{uu}^2(u,v) + 2\mathbf{S}_{uv}^2(u,v) + \mathbf{S}_{vv}^2(u,v)\right) dudv$$

módosító tagot ajánlják.

Az egyenletrendszer megint sávszerkezetű lesz, amit a megoldásnál ki lehet használni.

**Paraméter korrekció**

Ez analóg a görbéknél tárgyalt esetekkel. A

$$\Phi(\Delta u, \Delta v) := \frac{1}{2}(\mathbf{S}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \mathbf{P})^2$$

függvényt szeretnénk minimalizálni. (Az $\frac{1}{2}$ faktor csak azért szerepel, hogy a későbbi képletek minél egyszerűbbek legyenek.) Differenciáljuk $\Phi$-t:

$$\langle \mathbf{S} - \mathbf{P}, \mathbf{S}_u \rangle = 0, \tag{4.19}$$
$$\langle \mathbf{S} - \mathbf{P}, \mathbf{S}_v \rangle = 0. \tag{4.20}$$

Ha $\mathbf{S}$-et lineárisan közelítjük a Taylor sorfejtésével, azaz

$$\mathbf{S}(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) \approx \mathbf{S}(u_0,v_0)+\mathbf{S}_u(u_0,v_0)\Delta u+\mathbf{S}_v(u_0,v_0)\Delta v,$$

akkor kapjuk a

$$\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{S}_u^2 & \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\rangle \\ \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\rangle & \mathbf{S}_v^2\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}\langle \mathbf{P}-\mathbf{S}, \mathbf{S}_u\rangle \\ \langle \mathbf{P}-\mathbf{S}, \mathbf{S}_v\rangle\end{pmatrix}$$

lineáris korrekciós formulát.

Hogyha pedig (4.19)-re alkalmazzuk a Newton-iterációs formulát, akkor a

$$\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{S}_u^2+\langle \mathbf{S}-\mathbf{P}, \mathbf{S}_{uu}\rangle & \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\rangle+\langle \mathbf{S}-\mathbf{P}, \mathbf{S}_{uv}\rangle \\ \langle \mathbf{S}_u, \mathbf{S}_v\rangle+\langle \mathbf{S}-\mathbf{P}, \mathbf{S}_{uv}\rangle & \mathbf{S}_v^2+\langle \mathbf{S}-\mathbf{P}, \mathbf{S}_{vv}\rangle\end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix}\langle \mathbf{P}-\mathbf{S}, \mathbf{S}_u\rangle \\ \langle \mathbf{P}-\mathbf{S}, \mathbf{S}_v\rangle\end{pmatrix}$$

kvadratikus korrekciót kapjuk.

## 4.8 A cubic spline egy extremális tulajdonsága

A "spline" szó valójában egy mechanikus tervezési eszköz nevéből származik. Például hajóépítő műhelyekben gyakori feladat volt, hogy olyan sima görbéket tervezzenek, melyek adott $\mathbf{P}_i$ ($i = 1,\ldots,n$) pontokon haladnak keresztül. Ezt a feladatot úgy oldották meg, hogy egy hajlékony rudat fektettek át az adott pontokon. Ez volt a spline. Vagyis a spline azt a feladatot oldotta meg, hogy minimalizálta a hajlításból származó energiát. Ezt az energiát jó közelítéssel $\int_a^b \kappa^2$-nek tekinthetjük. Ha ezt az integrált - nagyon durva közelítéssel - helyettesítjük $\int_a^b \ddot{\mathbf{S}}$-tal, akkor az alábbi feladathoz jutunk: Melyik az a kétszer folytonosan differenciálható $f$ függvény, amelyik eleget tesz az

$$f(t_i) = P_i \qquad (i = 1,\ldots,n) \tag{4.21}$$

interpolációs feltételnek és minimalizálja az $\int (\ddot{f})^2$ integrált?

Be fogjuk bizonyítani, hogy a fenti feladat megoldását a harmadfokú (azaz *cubic*) spline-ok szolgáltatják.

Tekintsük azon $C^2$ függvények $\mathcal{G}$ halmazát, melyek értéke a $t_k$ pontokban $P_k$ ($k = 0,\ldots,n$), és a végpontokban a deriváltjuk egy adott érték. Határozzuk meg az ilyen függvények közül azt, amelynél

$$E(f) = \int_a^b \ddot{f}(t)^2 dt$$

minimális.

**4.8.1. Tétel.** *Az $E(f)$ funkcionál extrémumát az $f \in \mathcal{G}$ függvények közül a cubic spline-ok szolgáltatják.*

**Bizonyítás.** Fent láttuk, hogy $\mathcal{G}$-be pontosan egy cubic spline tartozik. Jelöljük ezt $s$-sel és legyen $f$ egy tetszőleges $\mathcal{G}$-beli függvény. Most nyilván

$$\int_a^b \left(\ddot{f}(t)-\ddot{s}(t)\right)^2 dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\ddot{f}(t)-\ddot{s}(t)\right)^2 dt.$$

Kétszer parciálisan integrálva kapjuk:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\ddot{f}(t)-\ddot{s}(t)\right)\ddot{s}(t)dt = (\dot{f}-\dot{s})\ddot{s}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} - \quad (f-s)\dddot{s}\Big|_{t_{i-1}}^{t_i} + \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f(t)-s(t))\, s^{(4)}(t)dt.$$

Mivel $s$ harmadfokú, az utolsó tag nulla, és mivel $f(t_i) = s(t_i)$, az utolsó előtti tag is nulla. Így

$$\int_a^b \left(\ddot{f}(t)-\ddot{s}(t)\right)\ddot{s}(t)dt = (\dot{f}-\dot{s})\ddot{s}\Big|_a^b.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_a^b (\ddot{f}(t)-\ddot{s}(t))^2dt &= \int_a^b (\ddot{f}(t))^2dt - 2\int_a^b (\ddot{f}(t)-\ddot{s}(t))\ddot{s}(t)dt - \int_a^b (\ddot{s}(t))^2dt \\ &= \int_a^b (\ddot{f}(t))^2dt - \int_a^b (\ddot{s}(t))^2dt - 2\,(\dot{f}-\dot{s})\ddot{s}\Big|_a^b\end{aligned}$$

azaz

$$\int_a^b (\ddot{f}(t))^2dt = \int_a^b (\ddot{f}(t)-\ddot{s}(t))^2dt + \int_a^b (\ddot{s}(t))^2dt + 2\,(\dot{f}-\dot{s})\ddot{s}\Big|_a^b.$$

A végpontokban a deriváltak megegyeznek, így egy nemnegatív tag elhagyásával az állítást kapjuk. ■

Vegyük észre, hogy a bizonyítás igaz marad "természetes" végponti feltétel esetén is.

Ennek a tételnek sok általánosítása ismeretes. Egyes adott funkcionálok minimumáról be lehet látni, hogy az egy speciális jó tulajdonságokkal rendelkező spline függvény.

## 4.9 NURBS

A fenti cím a Non Uniform Rational B-splines rövidítése.

### 4.9.1 NURBS görbék

**4.9.1. Definíció.** *Az*

$$\mathbf{S}(t) = \frac{\sum_i \mathbf{c}_i w_i N_i^r(t)}{\sum_i w_i N_i^r(t)}$$

*görbét Non Uniform Rational B-spline görbének vagy röviden NURBS görbének hívjuk, ahol $N_i^r$ egy adott knot szekvenciához tartozó B-spline bázis függvény, $\mathbf{c}_i$ kontrollpont és $w_i > 0$ súly.*

Ez a kifejezés általánosítása az eddig tárgyalt, a CAGD-ben alkalmazott görbetípusoknak, speciális esetként tartalmazza az idáig megismert görbe típusokat: a Bézier görbét, a B-spline görbét és a racionális Bézier görbét is. A legtöbb modellező rendszerben implementálták, szabványnak tekinthető. Rendelkezik a szokásos jó tulajdoságokkal: konvex burok tulajdonság, stb.

**4.9.2. Példa.** *Korábban már láttuk a 3.13.1 Példában, hogy egy negyed kört hogyan adhatunk meg racionális Bézier alakban. Ezekből, kétszeres knotokat használva, könnyen összerakhatunk egy teljes kört. A knotok, súlyok és kontrollpontok a következőek lesznek:*

$$U = \left\{0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,1,1\right\} \tag{4.22}$$

$$\{w_i\} = \left\{1,\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},1\right\} \tag{4.23}$$

$$\{\mathbf{c}_i\} = \{(1,0),(1,1),(0,1),(-1,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(1,-1),(1,0)\} \tag{4.24}$$

*Ld. 4.3 ábra.*

### 4.9.2 NURBS felületek

A görbékhez hasonlóan definiálhatók a NURBS felületek.

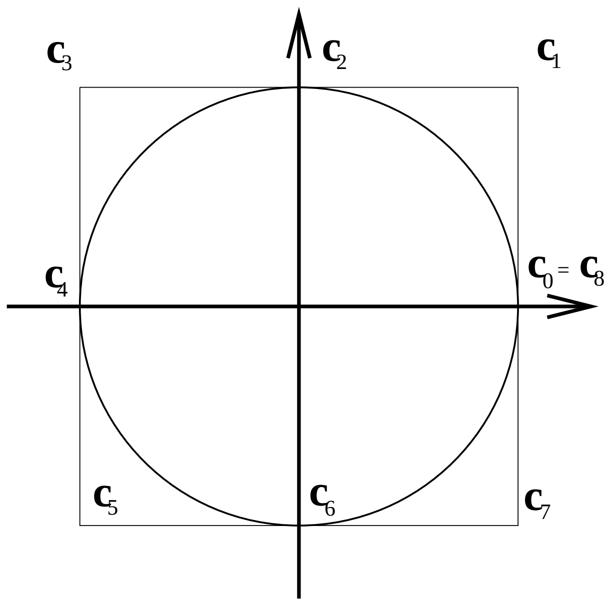


Figure 4.3: Kör ábrázolása NURBS segítségével

**4.9.3. Definíció.** *Az*

$$\mathbf{S}(u,v) = \frac{\sum_i \sum_j \mathbf{c}_{ij} w_{ij} N_i^n(u,U) N_j^m(v,V)}{\sum_i \sum_j w_{ij} N_i^n(u,U) N_j^m(v,V)}.$$

*felületet az $U$, ill. $V$ knotokhoz tartozó, $w_{ij} > 0$ súlyokkal és $\mathbf{c}_{ij}$ kontrollpontokkal rendelkező NURBS felületnek nevezzük.*

Könnyen igazolható, hogy NURBS felületként felírhatók olyan forgásfelületek, melyeknek a profilját egy tetszőleges NURBS síkgörbe szolgáltatja. Legyen például

$$\mathbf{C}(v) = \frac{\sum_j \mathbf{P}_j \hat{w}_j N_j^m(v,V)}{\sum_j \hat{w}_j N_j^m(v,V)}$$

egy olyan NURBS görbe, amely az $xz$ síkban fekszik (minden $\mathbf{P}_j$ kontrollpont az $xz$ síkban van, $\mathbf{P}_j = (x_j, 0, z_j)$. Ekkor a $\mathbf{C}(v)$-nek a $z$ tengely körül való megforgatásából származó felületet jelöljük $\mathbf{S}(u,v)$-vel. Az $\mathbf{S}(u,v)$ felület előállítható NURBS alakban:

$$\mathbf{S}(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{8} \sum_j \mathbf{c}_{ij} w_{ij} N_i^3(u,U) N_j^m(v,V)}{\sum_{i=0}^{8} \sum_j w_{ij} N_i^3(u,U) N_j^m(v,V)},$$

ahol a 4.9.2 Példabeli jelöléseket használjuk: $w_{ij} = w_i \hat{w}_j$, $\mathbf{c}_{0,j} = (x_j, 0, z_j)$, $\mathbf{c}_{1,j} = (x_j, x_j, z_j)$, $\mathbf{c}_{2,j} = (0, x_j, z_j), \ldots, \mathbf{c}_{8,j} = \mathbf{c}_{0,j}$.

Ennek a felületnek minden $u$ paramétervonala egy, a $z$ tengely körüli kör lesz, amely átmegy a $\mathbf{C}(v)$ görbén.

Ilyen módon megadható pl. gömb, henger, kúp, tórusz stb.

# Fejezet 5

# Felület definiálása görbeháló interpolációval

## 5.1 Twist inkompatibilitás

Az alapprobléma a következő. Egy sima (érintősík-folytonos) felületet szeretnénk definiálni. Adottak sima (legalább kétszer folytonosan differenciálható) parametrikus görbék, melyekkel kapcsolatban azt szeretnénk, hogy ezek a definiálandó felület felületi görbéi legyenek. A felület azon összefüggő részét, amelyet az adott görbék határolnak, de amelynek belsejében már nincs pontja a görbehálónak, *patch*nek (folt) nevezzük. A továbbiakban egyelőre feltételezzük, hogy egy patch legalább kétszer folytonosan differenciálható.

Általában a patcheknek akárhány oldaluk lehet és egy sarokpontban akárhány görbe találkozhat.

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, mikor egy sarokpontba $n$ görbe fut be, azaz a sarokpont körül $n$ patch találkozik. Itt a felületeket és a görbéket csak a sarokpont egy kis környezetében tekintjük. Így az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ezek a patchek mind négy oldalúak (ennek csak jelöléstechnikai jelentősége van). Jelöljük a görbéinket $\mathbf{R}_i(t)$-vel ($i = 1, \ldots, n$). Feltételezzük, hogy a számozás megfelel a sorrendjüknek, és a paraméterezésük olyan, hogy $\mathbf{R}_j(0) = \mathbf{R}_{j+1}(0)$ ($j = 1, \ldots, n-1$) a sarokpont. A továbbiakban az indexelést modulo $n$ értjük, azaz $\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}_1$. A sarokpontbeli felületi egységnormálist jelöljük $\mathbf{N}$-nel. Az $\mathbf{R}_{j-1}$ és $\mathbf{R}_j$ közti patchet $\mathbf{P}_j(u, v)$-vel jelöljük. Itt a paraméterezés olyan, hogy $\mathbf{P}_j(u, 0) = \mathbf{R}_j(u)$ és $\mathbf{P}_j(0, v) = \mathbf{R}_{j-1}(v)$.

A $\mathbf{P}_j$ patchekből álló felületről tegyük fel, hogy érintősík folytonos. Ebből azt kapjuk, hogy a határgörbék mentén a szomszédos patchek elsőrendű parciális deriváltjainak a közös érintősíkban kell lenniük, azaz $\frac{\partial \mathbf{P}_j}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{P}_j}{\partial v}$, $\frac{\partial \mathbf{P}_{j+1}}{\partial u}$ és $\frac{\partial \mathbf{P}_{j+1}}{\partial v}$ lineárisan összefüggő. A fentiek szerint

$$\frac{\partial \mathbf{P}_j}{\partial v}(0, t) = \dot{\mathbf{R}}_{j-1}(t),$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_j}{\partial u}(t, 0) = \frac{\partial \mathbf{P}_{j+1}}{\partial v}(0, t) = \dot{\mathbf{R}}_j(t),$$

és

$$\frac{\partial \mathbf{P}_{j+1}}{\partial u}(t, 0) = \dot{\mathbf{R}}_{j+1}(t).$$

A lineáris összefüggés azt jelenti, hogy léteznek olyan $a_j$, $b_j$ és $c_j$ skalár függvények, hogy

$$a_j(t)\frac{\partial \mathbf{P}_j(t, 0)}{\partial v} + b_j(t)\frac{\partial \mathbf{P}_j(t, 0)}{\partial u} + c_j(t)\frac{\partial \mathbf{P}_{j+1}(0, t)}{\partial u} = \mathbf{0}. \tag{5.1}$$

Így (5.1)-be 0-t helyettesítve, a fentiek értelmében

$$a_j(0)\dot{\mathbf{R}}_{j-1}(0) + b_j(0)\dot{\mathbf{R}}_j(0) + c_j(0)\dot{\mathbf{R}}_{j+1}(0) = \mathbf{0}.$$

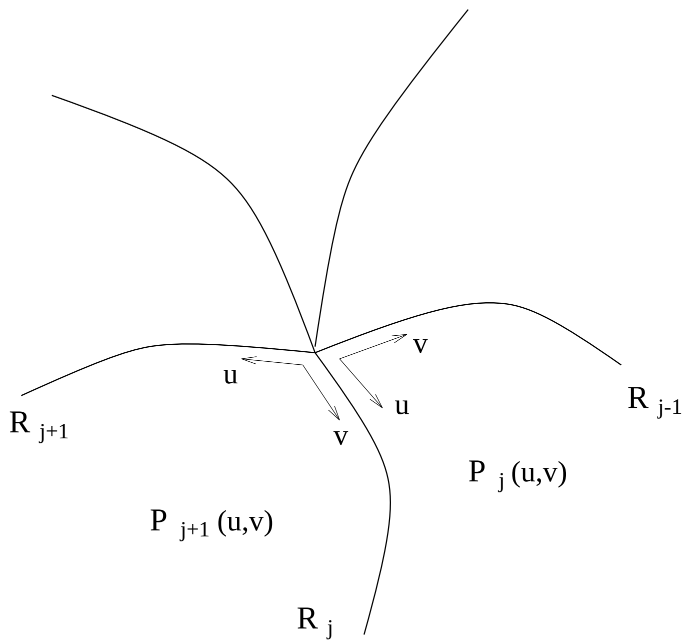


Figure 5.1: Görbeháló

A fenti egyenletet szorozzuk meg vektoriálisan $\dot{\mathbf{R}}_j(0)$-vel. Ekkor a középső tag eltűnik, és kapunk két párhuzamos (normális irányú) vektort:

$$a_j(0)\dot{\mathbf{R}}_{j-1}(0) \times \dot{\mathbf{R}}_j(0) = c_j(0)\dot{\mathbf{R}}_j(0) \times \dot{\mathbf{R}}_{j+1}(0).$$

Mindkét oldalon a vektorok párhuzamosak a sarokpontban levő normálissal. Szorozzuk be a normálissal mindkét oldalt:

$$\frac{a_j(0)}{c_j(0)} = \frac{\langle \dot{\mathbf{R}}_j(0) \times \dot{\mathbf{R}}_{j+1}(0), \mathbf{N}\rangle}{\langle \dot{\mathbf{R}}_{j-1}(0) \times \dot{\mathbf{R}}_j(0), \mathbf{N}\rangle}.$$

Vegyük észre, hogy a jobboldalon a számlálóban álló kifejezés ugyanolyan mint a nevező, csak az indexek eggyel nagyobbak. Az indexek ciklikus számozása révén világos, hogy minden kifejezés, ami előfordul a számlálóban az az előző tényezőben nevező. Így

$$\prod_{j=1}^{n} \frac{a_j(0)}{c_j(0)} = 1 \tag{5.2}$$

adódik.

Most differenciáljuk (5.1)-t:

$$\dot{a}_j(t)\frac{\partial \mathbf{P}_j(t,0)}{\partial v} + \dot{b}_j(t)\frac{\partial \mathbf{P}_j(t,0)}{\partial u} + \dot{c}_j(t)\frac{\partial \mathbf{P}_{j+1}(0,t)}{\partial u} +$$
$$a_j(t)\frac{\partial^2 \mathbf{P}_j(t,0)}{\partial u \partial v} + b_j(t)\frac{\partial^2 \mathbf{P}_j(t,0)}{\partial u^2} + c_j(t)\frac{\partial^2 \mathbf{P}_{j+1}(0,t)}{\partial u \partial v} = \mathbf{0} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Tekintsük a fenti egyenletrendszert a $t = 0$ pontban. Az egyenletben szereplő vektoriális mennyiségek között szerepelnek egyrészt a határgörbék első és második deriváltjai, valamint a patchek vegyes parciális deriváltjai, az ún. *twist* (csavarodás) vektorok. Próbáljuk megoldani az egyenletrendszerünket ezekre a twist vektorokra, mint ismeretlenekre nézve!

Használjuk a következő jelöléseket:

$$\mathbf{x}_j := \frac{\partial^2 \mathbf{P}_j(0,0)}{\partial u \partial v},$$
$$\mathbf{z}_j := -b_j(0)\frac{\partial^2 \mathbf{P}_j(0,0)}{\partial u^2} - \dot{a}_j(0)\frac{\partial \mathbf{P}_j(0,0)}{\partial v} - \dot{b}_j(0)\frac{\partial \mathbf{P}_j(0,0)}{\partial u} - \dot{c}_j(0)\frac{\partial \mathbf{P}_{j+1}(0,0)}{\partial u}.$$

Ezekkel a jelölésekkel az egyenletrendszerünk:

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \\ \dots \\ \mathbf{z}_{n-1} \\ \mathbf{z}_n \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az egyenletrendszer determinánsát. 5.2 felhasználásával könnyen adódik:

$$a_1 \dots a_n + (-1)^{n+1} c_1 \dots c_n = \begin{cases} 2a_1 \dots a_n & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0 & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ez azt jelenti, hogy ha páros számú görbe érkezik a sarokpontba, akkor általában a fenti feladat nem megoldható, vagyis ilyenkor általában a görbeháló nem ágyazható be egy $C^2$ felületbe. Ha beágyazható lenne, abból nyilván következnék, hogy a fenti egyenletrendszernek *van* megoldása.

**Megjegyzés.** Könnyű számolással adódik, hogy páros $n$ esetén a megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \mathbf{z}_i \prod_{j=1}^{i-1} \frac{c_j}{a_{j+1}} = \mathbf{0}.$$

Ilyenkor végtelen sok megoldás létezik. A legfontosabb ilyen eset a következő. Legyen $n = 4$ és legyen $\dot{\mathbf{R}}_1$ párhuzamos $\dot{\mathbf{R}}_3$-mal valamint $\dot{\mathbf{R}}_2$ párhuzamos $\dot{\mathbf{R}}_4$-gyel. A fenti kritérium alapján könnyű számolás adja, hogy ilyen esetben a feladat megoldható. Erre az esetre az irodalomban számos javaslat ismeretes arra, hogy hogyan állítsuk be a twist vektorokat (ld. pl. [HL93]).

Innen kétfelé lehet továbbmenni. Egyik lehetőség: megváltoztatni az input adatokat, azaz a görbehálót. Ez nem egy abszurd alternatíva, mert sokszor a görbeháló adatai is csak valamilyen közelítésből származnak, és még az is előfordulhat, hogy az input ilyen megváltoztatása (amely valamilyen értelemben kisimítást jelent) az input görbeháló javítását jelenti.

**Megjegyzés.** A fenti egyenletrendszer páros $n$ esetére való szingularitását Du és Schmitt ([DS88, DS91]), illetve Renner ([Ren91]) mutatták ki. Du és Schmitt megmutatták, hogy mi a szükséges és elégséges feltétele a fenti, ún. *twist kompatibilitási* egyenlet megoldhatóságának. Peters bebizonyította ([Pet91]), hogy ha a görbeháló beágyazható egy $C^2$ felületbe, az elegendő, de nem szükséges feltétel.

A másik lehetőség az, amikor a görbeháló adatait megváltoztathatatlannak kell tekintenünk. Ilyenkor olyan technikát kell alkalmaznunk, aminek a révén a kapott felület biztosan *nem* $C^2$ lesz.

Most néhány ilyen megoldást ismertetünk.

## 5.2 Coons patchek

Az alább ismertetendő módszert S. Coons találta ki ([Coo67]). A módszerével kapott patcheket *Coons patch*eknek nevezik.

Első lépésben tekintsük azt a feladatot, hogy egy adott (négy felületi görbe által határolt) sima $\mathbf{S}(u, v)$ felületet ismer"unk a határgörbéi mentén, és most találjunk egy olyan - minél egyszerűbb - felületet, amely interpolálja a határgörbéket. Először definiáljunk interpolációt csak két-két egymással szembeni oldal között:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{S}(u, v) := (1 - v)\mathbf{S}(u, 0) + v\mathbf{S}(u, 1),$$
$$\mathbf{P}_2\mathbf{S}(u, v) := (1 - u)\mathbf{S}(0, v) + u\mathbf{S}(1, v).$$

Az így kapott két felület két - két oldalt interpolál, de a másik kettőt nem. Javítsuk ki, mondjuk az elsőt. A javasolt korrigált felület:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(u,v) &:= \mathbf{P}_1\mathbf{S}(u,v) + \mathbf{P}_2(\mathbf{S} - \mathbf{P}_1\mathbf{S})(u,v)\\ &= \mathbf{P}_1\mathbf{S}(u,v) + \mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v) - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v).\end{aligned}$$

Itt

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v) &= (1-u)\{(1-v)\mathbf{S}(0,0) + v\mathbf{S}(0,1)\} + u\{(1-v)\mathbf{S}(1,0) + v\mathbf{S}(1,1)\}\\ &= \begin{pmatrix}1-u & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{S}(0,0) & \mathbf{S}(0,1)\\ \mathbf{S}(1,0) & \mathbf{S}(1,1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-v\\ v\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\mathbf{P}_1 \oplus \mathbf{P}_2 := \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2.$$

Ezt a két operátor *Boole összeg*ének fogjuk hívni.

Könnyű látni, hogy a fenti lineáris interpolációs operátorok Boole összege interpolálja a határgörbéket. Világos azonban, hogy több tartomány esetén az így kapott patch-ek folytonosan csatlakoznak egymáshoz, de kapcsolódásuk nem lesz sima.

Tételezzük fel, hogy a határ mentén nem csak a felület pozíciója, de (keresztirányú) derivált függvénye is rendelkezésre áll. Ekkor próbáljuk ezt is interpolálni!

Most használjuk a cubic interpolációs operátorokat:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1\mathbf{S}(u,v) &:= f_0(v)\mathbf{S}(u,0) + f_1(v)\mathbf{S}(u,1) + g_0(v)\mathbf{S}_v(u,0) + g_1(v)\mathbf{S}_v(u,1),\\ \mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v) &:= f_0(u)\mathbf{S}(0,v) + f_1(u)\mathbf{S}(1,v) + g_0(u)\mathbf{S}_u(0,v) + g_1(u)\mathbf{S}_u(1,v).\end{aligned}$$

ahol $f_0$, $f_1$, $g_0$ és $g_1$ a korábban már megismert harmadfokú Hermite alappolinomok. A fentiekhez hasonlóan kapjuk, hogy a Boole összeg

$$\mathbf{Q}(u,v) = \mathbf{P}_1\mathbf{S}(u,v) + \mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v) - \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v)$$

interpolálja a határon adott pozicionális és derivált értékeket. Itt

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v) = \begin{pmatrix}f_0(u) & f_1(u) & g_0(u) & g_1(u)\end{pmatrix}\mathbf{M}\begin{pmatrix}f_0(v)\\ f_1(v)\\ g_0(v)\\ g_1(v)\end{pmatrix}$$

ahol

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\mathbf{S}(0,0) & \mathbf{S}(0,1) & \mathbf{S}_v(0,0) & \mathbf{S}_v(0,1)\\ \mathbf{S}(1,0) & \mathbf{S}(1,1) & \mathbf{S}_v(1,0) & \mathbf{S}_v(1,1)\\ \mathbf{S}_u(0,0) & \mathbf{S}_u(0,1) & \mathbf{S}_{uv}(0,0) & \mathbf{S}_{uv}(0,1)\\ \mathbf{S}_u(1,0) & \mathbf{S}_u(1,1) & \mathbf{S}_{uv}(1,0) & \mathbf{S}_{uv}(1,1)\end{pmatrix}.$$

(A mátrixban szereplő $\mathbf{S}_{uv}$ vektorok a twistek.) Vegyük észre, hogy $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{S}(u,v)$ tulajdonképpen egy $u$-ban, $v$-ben egyaránt harmadfokú (bicubic) polinomiális patch. Ha a határon adott pozicionális és derivált függvények harmadfokú polinomok, akkor a $\mathbf{Q}(u,v)$ is egy bicubic polinomiális patch lesz. Ha a határ pozíció és derivált adatait egy kétszeresen differenciálható felületből kaptuk (ekkor $\mathbf{S}_{uv} = \mathbf{S}_{vu}$), úgy a fenti $\mathbf{Q}(u,v)$ egyszer folytonosan differenciálható lesz.

Ezen a ponton úgy tűnhet, hogy ha adottak a határgörbék, akkor csak a mi ügyességünkön múlhat, hogy alkalmas keresztderivált függvényeket definiáljunk a határon, és így a Coons patchek segítségével egy $C^1$ felületet konstruáljunk. De az előző fejezetben láttuk, hogy ilyen konstrukció általában nem létezik.

## 5.3 Gregory patchek

Most egy, Gregorytól származó korrekciót ismertetünk ([Gre74]).

Az alapvető probléma az, hogy Coons patch esetén általában $\mathbf{S}_{uv} \neq \mathbf{S}_{vu}$. Nos, $\mathbf{M}$-ben helyettesítsük a konstans twisteket tartalmazó jobb alsó minort a következő mátrixszal:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{v\mathbf{S}_{uv}(0,0)+u\mathbf{S}_{vu}(0,0)}{u+v} & \dfrac{(1-v)\mathbf{S}_{uv}(0,1)+u\mathbf{S}_{vu}(0,1)}{u+1-v} \\ \dfrac{v\mathbf{S}_{uv}(1,0)+(1-u)\mathbf{S}_{vu}(1,0)}{1-u+v} & \dfrac{(1-v)\mathbf{S}_{uv}(1,1)+(1-u)\mathbf{S}_{vu}(1,1)}{1-u+1-v} \end{pmatrix}.$$

Az így kapott felületet jelöljük $\mathbf{G}(u,v)$-val. Habár ez a sarokpontokban szinguláris kifejezés, könnyű számolással igazolható, hogy az így kapott patch interpolálja a határgörbéket és deriváltakat, valamint

$$\left.\frac{\partial^2 \mathbf{G}(u,v)}{\partial u \partial v}\right|_{(i,j)} = \mathbf{S}_{uv}(i,j) \qquad \left.\frac{\partial^2 \mathbf{G}(u,v)}{\partial v \partial u}\right|_{(i,j)} = \mathbf{S}_{vu}(i,j) \qquad i,j \in \{0,1\}.$$

**Megjegyzés.** Fent láttuk, hogy polinomiális határadatok mellett a Coons patch egy közönséges polinomiális patch lesz (azaz Bézier patch). A Gregory patch Bézier formalizmussal való leírását harmadfokú polinomiális határadatok esetén, különböző alkalmazásaival együtt, Chiyokura és Kimura tette meg. Lényegében erre épül a DESIGNBASE rendszer. Más alkalmazásáról nem tudok. A geometriai modellezés szokásos interface-ei (VDA, IGES, STEP) segítségével *nem* lehet Gregory patchet definiálni.

Most tekintsük azt a feladatot, amikor adott egy olyan görbeháló, ahol minden patch négyoldalú, és a görbeszegmensek harmadfokú polinomok, és olyan patcheket akarunk konstruálni, amelyek interpolálják az adott görbeszegmenseket és $G^1$ felületet alkotnak.

Erre a Chiyokura-Kimura féle konstrukció a következő ([CK83]).

Először tekintsük a Gregory patch Bézier variánsát:

$$\mathbf{C}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} \mathbf{c}_{i,j}(u,v) b_{3,i}(u) b_{3,j}(v)$$

ahol a határon levő kontrollpontok (azaz amelyiknek valamelyik indexe 0 vagy 3) konstansok és

$$\mathbf{c}_{1,1}(u,v) = \frac{u\mathbf{c}_{1,1,0}+v\mathbf{c}_{1,1,1}}{u+v} \qquad \mathbf{c}_{1,2}(u,v) = \frac{u\mathbf{c}_{1,2,0}+(1-v)\mathbf{c}_{1,2,1}}{u+1-v}$$
$$\mathbf{c}_{2,1}(u,v) = \frac{(1-u)\mathbf{c}_{2,1,0}+v\mathbf{c}_{2,1,1}}{1-u+v} \qquad \mathbf{c}_{2,2}(u,v) = \frac{(1-u)\mathbf{c}_{2,2,0}+(1-v)\mathbf{c}_{2,2,1}}{1-u+1-v}$$

ahol a hármas indexű kontrollpontok megfelelnek a különböző twist vektoroknak. Itt a patch határán levő kontrollpontok adottak (ezek a harmadfokú görbeszegmensek kontrollpontjai). Így a feladat az alkalmas belső kontrollpontok megtalálása, ami - mint nyomban látni fogjuk - a jelen esetben ekvivalens a keresztderiváltak meghatározásával.

Mivel két szomszédos patch ugyanazt a görbeszegmenst interpolálja, ezért a $C^0$ folytonosság eleve biztosított. Tudjuk, hogy a $G^1$ folytonosság kizárólag a keresztderiváltakon múlik. Közvetlen számolás adja, hogy például

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial u}(0,v) = $$
$$3\left((\mathbf{c}_{1,0}-\mathbf{c}_{0,0})\, b_{3,0}(v) + (\mathbf{c}_{1,1,1}-\mathbf{c}_{0,1})\, b_{3,0}(v) + (\mathbf{c}_{1,2,1}-\mathbf{c}_{0,2})\, b_{3,0}(v) + (\mathbf{c}_{1,3}-\mathbf{c}_{0,3})\, b_{3,0}(v)\right).$$

Vegyük észre, hogy ez megegyezik annak a Bézier patchnek a keresztderiváltjával, amelynek a belső kontrollpontjai $\mathbf{c}_{1,1,1}$ és $\mathbf{c}_{1,2,1}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbf{C}_v(u,0)$ megegyezik annak a Bézier patchnek a keresztderiváltjával, amelynek a megfelelő belső kontrollpontjai $\mathbf{c}_{1,1,0}$ és $\mathbf{c}_{2,1,0}$. Vagyis a keresztderiváltakat lényegében egymástól függetlenül képezhetjük, és a problémát visszavezettük a megfelelő Bézier patchek közti konstrukcióra.

Most vizsgáljuk meg a keresztderivált függvényt. Ez egy harmadfokú polinom, amelynek a 0-ban és 1-ben vett értéke adott: (a megfelelő) határgörbék deriváltjai. Emlékezzünk vissza Degen tételére, amiről a Bézier felületeknél beszéltünk. Ott az volt az állítás, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ szomszédos Bézier patchek, azaz $\mathbf{A}(0,v) = \mathbf{B}(0,v) =: \mathbf{C}(v)$, akkor köztük (lényegében) akkor és csak akkor van $G^1$ kapcsolat, ha létezik olyan $\mathbf{D}$ (vektor) polinom, hogy

$$\mathbf{A}_u(0,v) = a_1(v)\mathbf{D}(v) + a_2(v)\dot{\mathbf{C}}(v)$$
$$\mathbf{B}_u(0,v) = b_1(v)\mathbf{D}(v) + b_2(v)\dot{\mathbf{C}}(v)$$

alkalmas $a_1$, $a_2$, $b_1$ és $b_2$ (skalár) polinomokkal.

Mivel a keresztderivált harmadfokú és $\dot{\mathbf{C}}$ másodfokú, ezért $a_2$ és $b_2$ legfeljebb lineáris lehet. Az egyszerűség kedvéért válasszuk $\mathbf{D}$-t és $a_1$ ill. $a_2$-t is lineárisnak. Mivel $\mathbf{D}$ lineáris, a két végpontban felvett értéke meghatározza. Ezekről annyit tudunk, hogy az érintősíkban kell lenniük és nem lehetnek párhuzamosak a határgörbe ottani értékével. Vegyünk fel ilyen $\mathbf{D}(0)$ és $\mathbf{D}(1)$ értékeket. A fenti megszorítások mellett lényegében tetszőlegesen lehet őket választani. Természetesen a különböző választások különböző felületet eredményeznek.

Most már csak azt kell biztosítanunk, hogy a végpontokban megegyezzenek a keresztderivált adott értékével:

$$\mathbf{A}_u(0,0) = a_1(0)\mathbf{D}(0) + a_2(0)\dot{\mathbf{C}}(0) \quad \mathbf{A}_u(0,1) = a_1(1)\mathbf{D}(1) + a_2(1)\dot{\mathbf{C}}(1)$$
$$\mathbf{B}_u(0,0) = b_1(0)\mathbf{D}(0) + b_2(0)\dot{\mathbf{C}}(0) \quad \mathbf{B}_u(0,1) = b_1(1)\mathbf{D}(1) + b_2(1)\dot{\mathbf{C}}(1).$$

Mivel $\mathbf{D}(0)$ és $\mathbf{D}(1)$ benne van a sarkoknál lévő (a görbeháló által meghatározott) érintősíkban, a fenti egyenlet megoldható, és a kapott $a_1(0)$, $a_1(1)$, … $b_2(1)$ értékek már teljesen meghatározzák az $a_1(v)$, $a_2(v)$, $b_1(v)$ és $b_2(v)$ lineáris függvényeket. Így a patch összes keresztderiváltját meghatároztuk, ami már kiadja a belső kontrollpontokat.

## 5.4 Nielson háromszögpatch

A következő módszer az ún. konvex kombinációs módszerek közé tartozik. Mi egy Nielsontól származó változatát ([Nie87]) ismertetjük.

Tegyük fel, hogy adott egy felület néhány pontja és ott az egységnormálisok. A pontokat egy olyan poliéder csúcsainak tekintjük, melynek minden lapja egy háromszög. (Nagyon sok ilyen poliédert lehet csinálni. Nem triviális kérdés, aminek komoly irodalma van, hogy hogyan kell jó háromszögesítést, ún. *trianguláció*t, csinálni.) Most olyan háromszögű patcheket akarunk csinálni, melyek interpolálják az adott adatokat, és $G^1$ módon kapcsolódnak a szomszédos patchekhez.

A konvex kombinációs patch három (albb definiált) részpatch konvex kombinációja lesz:

$$\mathbf{p}(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\mathbf{V})\mathbf{p}_i(\mathbf{V})$$

ahol

$$\alpha_i(\mathbf{V}) \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(\mathbf{V}) = 1.$$

Az $\alpha_i$ súlyfüggvényt úgy választjuk, hogy a háromszög $i$-edik oldala mentén ne legyen nulla, a másik két oldal mentén pedig tűnjön el:

$$\alpha_i(\mathbf{V}) = \frac{\lambda_{i-1}^2 \lambda_{i+1}^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2}$$

(az indexek modulo 3 tekintendők). Ezzel a súlyfüggvény választással $\mathbf{p}$ az $i$-edik háromszögoldal mentén $\mathbf{p}_i$-vel egyezik meg, sőt, a deriváltja is megegyezik $\mathbf{p}_i$ deriváltjával.

Az adott feladatnál egy általánosabb feladatot oldunk meg. Tegyük fel, hogy adottak az $\mathbf{F}(\mathbf{E}_i)$ határgörbék és az $\mathbf{N}(\mathbf{E}_i)$ határmenti egységnormális függvények. Itt csak a következő követelményeket kell kielégíteni: Először is $\mathbf{F}(\mathbf{V}_i) = \mathbf{P}_i$, $\mathbf{N}(\mathbf{V}_i) = \mathbf{N}_i$, továbbá a határgörbék érintőinek benne kell lenniük az $\mathbf{N}(\mathbf{E}_i)$ által definiált érintősíkokban.

Most definiáljuk a következő interpolációs operátort:

$$\mathbf{G}_{a,b}(\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{N}_0, \mathbf{N}_1; t) := f_0(t)\mathbf{U}_0 + f_1(t)\mathbf{U}_1 + ag_0(t)\mathbf{T}_0 + bg_1(t)\mathbf{T}_1.$$

Itt

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_0 &= (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0) - \langle \mathbf{N}_0, \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0\rangle \mathbf{N}_0 = \mathbf{N}_0 \times (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0) \times \mathbf{N}_0,\\ \mathbf{T}_1 &= (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0) - \langle \mathbf{N}_1, \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0\rangle \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_1 \times (\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0) \times \mathbf{N}_1,\end{aligned}$$

és $a$ és $b$ két paraméter, amit a felhasználó állíthat be. (Olyan esetekben, mikor egy paraméterről a módszer írója azt mondja, hogy a felhasználó állítja be, az azt jelenti, hogy ő nem tudja, hogy kell beállítani. Az én tippem $a = b = 1$.)

Ez az interpolációs operátor az $\mathbf{U}_0$-t köti össze az $\mathbf{U}_1$-gyel úgy, hogy az összekötő görbe belesimul az $\mathbf{N}_0$, ill. $\mathbf{N}_1$ érintősíkjába.

Végül a $\mathbf{p}_i(\mathbf{V})$ részpatchet a következő módon definiáljuk:

$$\begin{aligned}&\mathbf{p}_i(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =\\ &\quad \mathbf{G}_{a,b}\left(\mathbf{F}(\mathbf{V}_i), \mathbf{F}\left(\frac{\lambda_{i-1}\mathbf{V}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{V}_{i+1}}{\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1}}\right), \mathbf{N}(\mathbf{V}_i), \mathbf{N}\left(\frac{\lambda_{i-1}\mathbf{V}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathbf{V}_{i+1}}{\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1}}\right); 1 - \lambda_i\right).\end{aligned}$$

**5.4.1. Tétel.**

$$\mathbf{p}(\mathbf{E}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{E}_i)$$

*és $\mathbf{p}(\mathbf{V})$ egységnormálisai a határ mentén megegyeznek $\mathbf{N}(\mathbf{E}_i)$-vel.*

**Bizonyítás.** Vegyük észre, hogy egyrészt

$$\alpha_i(\mathbf{E}_j) = \begin{cases} 1 & \text{ha i=j,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

másrészt

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial \hat{\mathbf{E}}_i}(\mathbf{E}_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Így

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \hat{\mathbf{E}}_i}(\mathbf{E}_i) = \frac{\partial \mathbf{p}_i}{\partial \hat{\mathbf{E}}_i}(\mathbf{E}_i).$$

Mivel $\mathbf{p}_i$ és $\mathbf{p}$ interpolálja $\mathbf{F}$-et a határon, a határ menti iránymenti deriváltjaik ott megegyeznek. Így a határon $\mathbf{p}_i$-nek és $\mathbf{p}$-nek két különböző iránymenti deriváltja megegyezik. Ebből következik, hogy ugyanaz az érintősíkjuk. Mivel a $\mathbf{G}$ operátort úgy csináltuk, hogy a határ mentén belesimul az adott normális érintősíkjába, hasonló okoskodással kapjuk, hogy a $\mathbf{p}_i$ egységnormálisa megegyezik $\mathbf{N}(\mathbf{E}_i)$-vel. Innen az állítás már következik. ■■

## 5.5 Patch felosztás

Az alább ismertetendő (Shirman és Séquin-től származó [SS87, SS91]) módszernél a kiindulási adatok: egy olyan görbeháló, ahol a patchek háromszögek, és minden görbe harmadfokú polinom.

A legjobb az lenne, ha a háromszög patcheket Bézier háromszögekkel tudnánk interpolálni. A twist inkompatibilitás miatt ez általában lehetetlen. Így ahhoz a megoldáshoz fordulunk, hogy a háromszöget három részháromszögre bontjuk egy középpontból kiindulva. (Végeselemes módszereknél Clough és Tocher javasolta ezt először.) Itt a feladat olyan felosztó görbéket, azután pedig olyan belső kontrollpontokat találni, hogy az így kapott három Bézier háromszög $G^1$ folytonos legyen egymással is és az őket körülvevő többi Bézier háromszöggel is.

A Shirman-Séquin konstrukció lényege az, hogy itt a kezdetben levő háromszöget nem *egy* Bézier háromszöggel próbáljuk interpolálni (ami a twist inkompatibilitás miatt lehetetlen), hanem hárommal. A patch belsejében vegyünk fel egy alkalmas új csúcspontot és ezt kössük össze harmadfokú görbékkel a patch sarokpontjaival. Így kapunk három háromszöget, melyeknek a határgörbéi harmadfokú polinomok. Majd ezeket a részpatcheket akarjuk negyedfokú Bézier háromszögekkel interpolálni, ami (rész)háromszögenként három - három belső kontrollpont definiálását jelenti. Vagyis a feladat olyan alkalmas felosztó görbék és belső kontrollpontok megtalálása, melyek $G^1$ folytonos felületet hoznak létre.

Shirman és Séquin ezeket a kontrollpontokat az 5.2 ábrán látható módon jelölte.

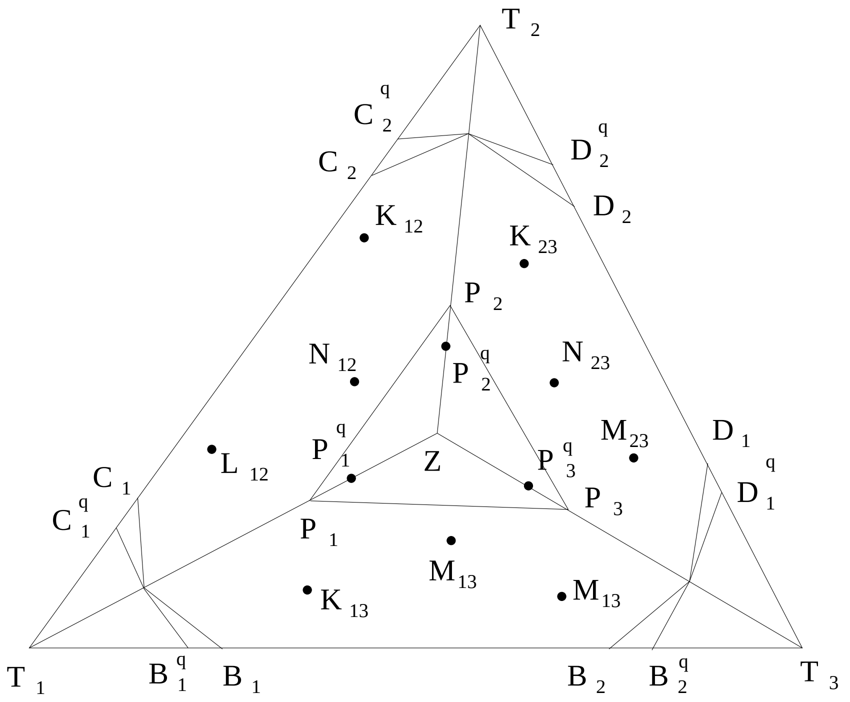


Figure 5.2: Shirman-Séquin konstrukció

Az elképzelés a következő: az eredeti görbeszegmensek mentén a Chiyokura-Kimura konstrukciót, a részháromszögek egymás közti $G^1$ folytonosságánál pedig a Farin feltételt használjuk.

Az egyszerűség kedvéért vegyük a következő egyenleteket:

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{3}(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)$$

és

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{T}_1 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{C}_1) \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{T}_2 + \mathbf{D}_2 + \mathbf{C}_2) \quad \mathbf{S}_3 = \frac{1}{3}(\mathbf{T}_3 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{D}_1)$$

Ekkor a Chiyokura-Kimura módszerrel az $\mathbf{L}_{ij}$, $\mathbf{K}_{ij}$ és $\mathbf{M}_{ij}$ kontrollpontokat meghatározhatjuk és a fenti egyenletek révén a Farin féle háromszög-terület feltételek is automatikusan teljesülnek.

A további feltételeket felírva és a kapott egyenletrendszert megoldva a következő formulákhoz jutunk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1 &= \frac{1}{6}(\mathbf{T}_1 - 3\mathbf{S}_1 + 4\mathbf{L}_{13} + 4\mathbf{L}_{12}),\\
\mathbf{P}_2 &= \frac{1}{6}(\mathbf{T}_2 - 3\mathbf{S}_2 + 4\mathbf{K}_{23} + 4\mathbf{K}_{12}),\\
\mathbf{P}_3 &= \frac{1}{6}(\mathbf{T}_3 - 3\mathbf{S}_3 + 4\mathbf{M}_{23} + 4\mathbf{M}_{13}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{12} &= \frac{1}{4}(\mathbf{A} + 2\mathbf{S}_3 - 7\mathbf{P}_3),\\
\mathbf{N}_{13} &= \frac{1}{4}(\mathbf{A} + 2\mathbf{S}_2 - 7\mathbf{P}_2),\\
\mathbf{N}_{23} &= \frac{1}{4}(\mathbf{A} + 2\mathbf{S}_1 - 7\mathbf{P}_1)
\end{aligned}$$

ahol

$$\mathbf{A} = 4(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3) - (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \mathbf{S}_3).$$

Ezzel a patch konstrukció teljes.

# Fejezet 6

# Felület-felület metszés

A geometriai modellezőrendszerekben sokszor kell megoldani egyes objektumok (általában görbék és felületek) egymással való metszetének a meghatározását. Most ezek közül csak a felület - felület metszést tárgyaljuk, mivel ez a legbonyolultabb, s így rajta keresztül jó képet alkothatunk az egész kérdéskörről.

Az egyszerűség kedvéért a felület-felület metszés keretében tárgyalunk néhány más problémát is, mely hasonló megoldási módszert igényel.

## 6.1 Felület-felület metszés

Továbbiakban felület alatt egyrészt implicit alakban megadott algebrai felületet értünk, azaz olyan $(x, y, z)$ pontok halmazát, melyekre az

$$f(x, y, z) = 0$$

egyenlet teljesül, ahol $f$ egy három változós polinom, másrészt olyan $\mathbf{s}(u, v)$ parametrikus felületeket, ahol $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ minden koordinátájában polinom, vagy racionális törtfüggvény.

Két felület metszete lehet üres halmaz, izolált pontok, görbe, felület, illetve az előbbiek tetszőleges kombinációja. A különböző esetek felismerése és megtalálása általában nagyon nehéz feladat. Most elsősorban azzal az esettel foglalkozunk, mikor a két felület metszete egy görbe.

Ha mindkét felület implicit

$$f(x, y, z) = 0 \qquad \text{és} \qquad g(x, y, z) = 0,$$

akkor a metszetgörbét két háromváltozós egyenlet írja le.

Ha az egyik felület implicit, a másik parametrikus:

$$f(\mathbf{s}(u, v)) = 0,$$

akkor a megoldáshoz eljuthatunk egy kétváltozós egyenlet megoldása révén.

Ha pedig mindkét egyenlet parametrikus

$$\mathbf{s}(u, v) = \mathbf{h}(s, t),$$

akkor három négyváltozós egyenletünk van.

A fenti egyenletek közös alakja

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \tag{6.1}$$

ahol $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $n$ az első esetben 3, a másodikban 2, a harmadikban pedig 4 volt.

## 6.2 Rolling ball blend (lekerekítő felület készítése a gördülő gömb módszerrel)

Egy gyakran előforduló probléma a következő. Adott két egymást metsző felület: $\mathbf{s}(u,v)$ és $\mathbf{h}(s,t)$. Esztétikai vagy műszaki okokból szeretnénk találni olyan harmadik ún. *blend* (lekerekítő) felületet, mely simán kapcsolódik mindkét felülethez. A legnépszerűbb változata az ilyen blend felület megadásnak, ha veszünk egy adott $r$ sugarú golyót, végiggördítjük, úgy, hogy érintse mindkét felületet s vesszük a golyó burkoló felületétének az alapfelületeket simán összekapcsoló részét. Ezt hívják *rolling ball* blendnek. A golyó középpontja által leírt görbét *spine* (gerinc) görbének nevezzük, a felületekkel való érintkezési pontok alkotják a *contact* görbéket.

Az $r$ sugárhoz tartozó rolling ball blend felületet ismerjük, ha sikerül meghatározni a spine görbét és a contact görbéket. Ezeket a következő egyenletrendszer írja le:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{s}(u,v)-\mathbf{c})^2 - r^2 &= 0\\
(\mathbf{h}(s,t)-\mathbf{c})^2 - r^2 &= 0\\
\langle \mathbf{s}(u,v)-\mathbf{c}, \mathbf{s}_u(u,v)\rangle &= 0\\
\langle \mathbf{s}(u,v)-\mathbf{c}, \mathbf{s}_v(u,v)\rangle &= 0\\
\langle \mathbf{h}(s,t)-\mathbf{c}, \mathbf{h}_s(s,t)\rangle &= 0\\
\langle \mathbf{h}(s,t)-\mathbf{c}, \mathbf{h}_t(s,t)\rangle &= 0
\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{c} = (x,y,z)$ a spine görbe, $(u,v)$, ill. $(s,t)$ pedig a contact görbék egy-egy pontja (az utóbbi kettő esetén a paraméter síkon). Vegyük észre, hogy ez is (6.1) típusú probléma. Jelen esetben $n = 7$.

Egy másik probléma a szerszámgépek vezérlőgörbéinek a meghatározása (NC, azaz numerical control pálya számítása). Ez is a fentihez hasonló ($n$-dimenziós térben megadott görbe meghatározása - nemlineáris egyenletmegoldás) feladathoz vezet.

## 6.3 Megoldási algoritmusok

A fenti probléma megoldása nem triviális, sok megközelítés ismeretes, pl. tisztán algebrai megközelítés (a változók kiküszöbölése) vagy pedig egyre csökkenő befoglaló dobozokkal való lokalizálása a metszetgörbének.

Mi most egy módszerrel foglalkozunk részletesebben, az ún. *marching* (követési) technikával. Ez a metszetgörbe egy approximációját állítja elő. Az algoritmus lényege az, hogy ha már ismerjük a metszetgörbe egy pontját, akkor aránylag könnyű a görbe mentén egy következő pontot megtalálni.

Az algoritmust a következő alrészekre bontjuk:

1. Kezdőpont keresés.
2. Lokális approximáció egy adott pontban.
3. Lépés a görbe mentén.
4. A lépésnek megfelelő pont kiszámítása.

### 6.3.1 Kezdőpont keresés

Ez egy nem teljesen megoldott probléma. Tekintsük azt az esetet, mikor a felületeink négyszög patchek. Először azt ellenőrizzük, hogy triviálisan nem tudjuk-e megállapítani, hogy *nincs* metszés. Ez nyilván sokszor előfordul és szükség van egy olcsó tesztre, amivel ezeket az eseteket aránylag megbízhatóan ki tudjuk szűrni.

Egy bevált technika az ún. *bounding box*ok (befoglaló dobozok) alkalmazása. Ha tudunk találni olyan egyszerű dobozokat, gömböket stb. melyek garantáltan tartalmazzák a patchet és aránylag közel vannak hozzá, akkor ezeknek a dobozoknak az egymást *nem* metszése garantálja, hogy a két felület metszete üres. Bézier, illetve racionális Bézier felületek esetén ilyen bounding boxot könnyű csinálni a felület kontrollpontjai segítségével.

Ha gyanús, hogy a két felületnek *van* közös pontja, akkor két eset lehetséges. Vagy az összes metszetgörbe átmegy valamelyik patch határán, vagy pedig van olyan metszetgörbe, amelyik zárt mindkét patch-en belül (*loop*-ot alkot). Az első esetben a kezdőpontkeresést visszavezetjük egy görbe-felület metszési feladatra (az egyik patch határgörbéit elmetsszük a másik patch-csel és vica versa). A görbe-felület metszés sokkal egyszerűbb feladatát mondjuk a bounding boxok finomításával és a végén egy Newton-Raphson iterációval elintézhetjük.

Abban az esetben, ha van loop, akkor bajban vagyunk. Ezért a patchek alkalmas felosztásával szeretnénk garantálni, hogy ne legyen loop. Ehhez kell egy jó kritérium, amely megmondja, hogy ha nincs loop. Ilyet kaphatunk például azon észrevétel alapján, hogy ha van loop, akkor a két felületnek van egy - egy olyan normálisa, melyek egy egyenesbe esnek (kollineárisak) ld. [SM88]. Tekintsük most egy patch összes egységnormálisát. Ha tudunk találni olyan befoglaló dobozt, amely elválasztja ezeket a másik patch normálisaitól, akkor készen vagyunk. Ha nem tudunk találni, akkor felezzük meg a patcheket mind $u$, mind pegig $v$ irányban, és kezdjük elölről az eljárást. Ez vagy véges lépésben befejeződik, vagy pedig az egyre kisebb patchek rázsugorodnak egy olyan pontpárra, ahol a felületek érintik egymást. Ezt megint Newton-Raphson iterációval pontosíthatjuk.

Világos, hogy az egész fent vázolt eljárás nagyon függ az alkalmazott toleranciáktól és meglehetősen számolásigényes.

(A módszer Sederberg és munkatársaitól származik ([SM88, SCK89]). Egy módosított változatát Hohmeyer adta [Hoh91]-ben.)

### 6.3.2 Lokális approximáció egy adott pontban

A görbét tekinthetjük ívhossz szerint paraméterezettnek:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(s)) = \mathbf{0}. \tag{6.2}$$

Feltételezzük, hogy az $\mathbf{x}_r$ pont rajta van a metszetgörbén:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_r) = \mathbf{0}.$$

Szeretnénk meghatározni $\mathbf{x}'_r$-t és $\mathbf{x}''_r$-t. Ha differenciáljuk (6.2)-t, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}(s))\,\mathbf{x}'(s) = \mathbf{0} \tag{6.3}$$

ahol $\mathcal{D}\mathbf{F}$ az $\mathbf{F}$ leképezés $n \times (n-1)$-es deriváltmátrixa.

Tegyük fel, hogy a deriváltmátrix rangja $n-1$. Ekkor a metszési feladatot *reguláris*nak nevezzük, különben *szinguláris*nak. (Szinguláris eset általában valamilyen geometriai szingularitást jelent, pl. két metszetgörbe metszi egymást stb. Más fajta szingularitást okozhat, ha egy felület degeneráltan paraméterezett, azaz nem reguláris. Most szinguláris esetekkel nem foglalkozunk, az egy külön, nem triviális probléma.)

Mivel a mátrix rangja $n-1$, ezért a (6.3) homogén lineáris egyenletnek a megoldásai egy egydimenziós alteret alkotnak. Ívhossz szerint deriváltunk, így a megoldás abszolút értéke 1 lesz, amiből következik, hogy előjeltől eltekintve pontosan egy nem $\mathbf{0}$ megoldás van.

Ezt egy alapvető lineáris algebrai módszer, az ún. Moore - Penrose féle általánosított inverz (ld. Függelék) segítségével könnyen és numerikusan stabil módon előállíthatjuk. Így kapjuk az $\mathbf{x}'_r$ értéket.

Meghatározhatjuk a $\mathcal{D}^2\mathbf{F}$ második derivált tenzort, és kétszeri differenciálással kapjuk, hogy

$$\mathbf{x}'^T(s)\mathcal{D}^2\mathbf{F}(\mathbf{x}(s))\,\mathbf{x}'(s) + \mathcal{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}(s))\,\mathbf{x}''(s) = \mathbf{0}.$$

Felhasználva azt, hogy

$$\langle \mathbf{x}''(s), \mathbf{x}'(s) \rangle = 0,$$

megint csak az általánosított inverz segítségével meghatározhatjuk $\mathbf{x}''_r$-t. (Hasonló módon meghatározhatnánk még magasabb rendű deriváltakat, egyre több számolás árán.)

### 6.3.3 Lépés a görbe mentén

Attól függően, hogy a kapott pontsorozatot később mire akarjuk használni, több lépéshossz választási stratégia képzelhető el. Mindenesetre cél, hogy ne nagyon távolodjunk el a metszetgörbétől. Ez kis lépéshossz választást jelent. Másrészt pedig nem célszerű túl kicsi lépéshosszt választani, mert ez nagyon lelassítja az algoritmust. A következő választás egy lehetséges kompromisszum. Approximáljuk a metszetgörbét a Taylor sorának az első három tagjával:

$$\mathbf{x}(s) \approx \mathbf{x}_r + \mathbf{x'}_r \Delta s + \mathbf{x''}_r \frac{\Delta s^2}{2}.$$

(Megjegyzendő, hogy $\mathbf{x''}_r$ voltaképp a görbületi vektor, ami merőleges $\mathbf{x'}_r$-re.) Az approximáció $\epsilon$-nál közelebb lesz az érintőegyeneshez, ha

$$\Delta s_r = \sqrt{\frac{2\epsilon}{|\mathbf{x''}_r|}}.$$

Ilyen $\Delta s_r$ lépésválasztással a következő közelítő ponthoz jutunk:

$$\hat{\mathbf{x}}_{r+1} := \mathbf{x}_r + \mathbf{x'}_r \Delta s_r + \mathbf{x''}_r \frac{\Delta s_r^2}{2}.$$

### 6.3.4 A lépésnek megfelelő pont kiszámítása

Nyilván $\hat{\mathbf{x}}_{r+1}$ az $\mathbf{x}_{r+1}$ görbepont egy durva approximációjának tekinthető. Meg kell találnunk egy ehhez közeli görbepontot. Ez lesz $\mathbf{x}_{r+1}$. Ezt a görbepontot jelöljük ki úgy, hogy legyen benne az $\hat{\mathbf{x}}_{r+1}$ ponton átmenő, $\mathbf{x'}_r$ normálisú síkban is, azaz oldjuk meg az

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x'}_r, \mathbf{x}_{r+1} - \hat{\mathbf{x}}_{r+1} \rangle &= 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}_{r+1}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

egyenletet. Ez már egy $n$ egyenletből álló, $n$ ismeretlenes egyenletrendszer, amit az $\hat{\mathbf{x}}_{r+1}$ kezdőpontból való Newton-Raphson iterációval megoldhatunk.

**Megjegyzés.** Ha nem sikerült meghatároznunk $\mathbf{x}_{r+1}$-et vagy pedig $\mathbf{x}_{r+1}$ nagyon messzire került $\hat{\mathbf{x}}_{r+1}$-től, akkor mondjuk a lépéshosszat felezve addig ismételjük az eljárást, mig csak kielégítő eredményt nem kapunk.

**Megjegyzés.** Elvileg a fenti marching módszert alkalmazhatjuk kezdőpontkeresésre is. Tekintsünk egy loopnak az egyik patch paramétersíkjában megfelelő zárt $(u, v)$ görbét. Ennek a görbének vannak olyan pontjai, ahol az érintő párhuzamos a paramétersík koordináta rendszerének valamelyik tengelyével. Nevezzük ezeket a pontokat *turning* (fordulási) pontoknak és próbáljuk megtalálni őket. Tekintsük az ezekre felírt egyenletrendszert

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

ahol $\mathbf{G} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ és $\mathbf{G}$ polinom. Ennek a gyökeit keressük. Most tekintsünk egy olyan $\mathbf{P} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ polinomot, melynek *ismerjük* a gyökeit és vizsgáljuk az

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{P}(\mathbf{x})(1 - t) + \mathbf{G}(\mathbf{x})t$$

polinom gyökeit. Mivel $\mathbf{F}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{P}(\mathbf{x})$, $\mathbf{F}$ gyökeit ismerjük, ha $t = 0$. Ezt tekinthetjük kezdőpontnak a $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ egyenlet megoldásainak a meghatározásánál. A megoldásgörbék mentén végighaladva meghatározhatjuk a megoldást a $t = 1$ pontban is, azaz $\mathbf{G}$ gyökeit.

Ezt a módszert *homotópia* módszernek hívják. Habár az ötlet nagyon szellemes, általában (ha $d$ és a fokszám nem nagyon alacsony) nagyon drága, nem hatékony eljárás.

**Megjegyzés.** Az irodalom szinte áttekinthetetlenül nagy. Egy jó áttekintést ad [Luk94]. Itt főként [Hof90]-t követtük.

## 6.4 Függelék: SVD és az általánosított inverz

A geometriai modellezésben vannak olyan algoritmusok (például a felület-felület metszés), amelyet nagyon sokszor alkalmazunk. Ezek az algoritmusok olyanok, hogy akár egyetlen hiba is az egész számítási folyamatot elronthatja, mégpedig úgy, hogy a felhasználó nem tud beavatkozni és korrigálni a hibát. Így rendkívül fontos a gyors és egyben nagyon megbízható, stabil eljárások használata.

A lineáris egyenletrendszerek megoldására ad egy nagyon stabil módszert az ún. *Singular Value Decomposition,* röviden SVD. Az SVD fő előnye, hogy képes automikusan felismerni és kezelni a szinguláris, illetve numerikusan ahhoz nagyon közel eső eseteket is.

### Singular Value Decomposition

Legyen $A$ egy $m \times n$-es mátrix. A továbbiakban feltesszük, hogy $m \geq n$ (ha ez nem teljesülne, akkor $A$-t kiegészíthetjük csupa 0-t tartalmazó sorokkal).

Az SVD a lineáris algebra következő tételén alapszik (amit nem bizonyítunk):

**6.4.1. Tétel.** *Az $m \times n$-es $A$ mátrixot, ahol $m \geq n$, fel lehet bontani három mátrix szorzatára*

$$A = UWV^T$$

*ahol $U$ egy $m \times n$-es oszlop-ortogonális mátrix, $W$ egy diagonális mátrix, melynek az elemei nem negatívok, és $V$ egy $n \times n$-es ortogonális mátrix.*

Másként kifejezve

$$U^TU = V^TV = VV^T = I_{n\times n},$$

és

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix},$$

ahol $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_n \geq 0$ az $A$ mátrix *szinguláris értékei.* (Egész pontosan a szinguláris értékek az $A^TA$ mátrix sajátértékeinek pozitív négyzetgyökei, $V$ az $A^TA$ mátrix ortonormalizált sajátvektorai, és $U$ pedig $AA^T$ $n$ legnagyobb sajátértékéhez tartozó $n$ ortonormalizált sajátvektora.)

Geometriailag tekintve a fenti felbontás azt mondja ki, hogy tetszőleges, az $n$ dimenziós teret $m$ dimenziós térbe vivő $A$ lineáris operátor úgy tekinthető, mint

1. távolságtartó tükrözés és forgatás ($V^T$),
2. a koordináta tengelyek irányába való nyújtások/zsugorítások ($W$),
3. egy másik távolságtartó forgatás és tükrözés, valamint az $m$ dimenziós térbe való képzés ($U$).

Fontos észrevenni, hogy a zsugorítás lehet 0 vagy tetszőlegesen kis érték is. A fenti előállítás ezeket expliciten a kezünkbe adja.

Először tekintsük azt az esetet, mikor $n = m$. Ekkor világos módon $A$ inverze

$$A^{-1} = V[\mathrm{diag}(1/w_j)]U^T.$$

Ezzel a leképezéssel akkor van probléma, ha az egyik $w_j$ 0, illetve nagyon kicsi. Ekkor az $A$ mátrixot **szinguláris**nak, illetve **rosszul kondicionált**nak nevezzük.

A mátrixok esetén két fontos fogalom a *kernel* vagy másszóval *magtér* és a *range,* másszóval *képtér.* Az $A$ leképezés magterét mindazon $\mathbf{x}$ vektorok alkotják, melyekre $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. A képtér pedig mindazon $\mathbf{b}$ vektorokból áll, amelyekhez létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ha a magtér dimenziója $k$ és a képtéré $r$, akkor világos, hogy $n = k + r$.

Az SVD expliciten megkonstruálja ezen terek bázisát: $U$ azon oszlopvektorai, melyek indexe megegyezik a nem 0 $w_j$-k indexével, kifeszítik a képteret, míg $V$ azon oszlopvektorai, melyek a 0 szinguláris elemekhez tartoznak, a kernel bázisvektorai.

Most tekintsük az

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

egyenletet. Tegyük fel, hogy $A$ szinguláris. Két eset lehetséges: $\mathbf{b}$ vagy benne van $A$ képterében, vagy nincs benne. Az első esetben több megoldás is lehetséges: ha $\mathbf{x}$ egy megoldás és $\mathbf{x}_1$ a magtér tetszőleges eleme, akkor $\mathbf{x} + \mathbf{x}_1$ is nyilván megoldás. Próbáljuk megtalálni a legkisebb abszolút értékű megoldást. Előkészítésül vezessünk be néhány jelölést:

$$\begin{aligned} w_j^+ &= \begin{cases} \dfrac{1}{w_j} & \text{ha } w_j > 0, \\ 0 & \text{ha } w_j = 0, \end{cases} \\ W^+ &= [\mathrm{diag}(w_j^+)], \\ A^+ &= VW^+U^T. \end{aligned}$$

Az $A^+$ mátrixot Moore-Penrose féle **általánosított inverz**nek hívják. Ha az $A$ mátrix egy négyzetes nem-szinguláris mátrix, akkor az általánosított inverz a mátrix inverze. A számítógépes alkalmazásban ajánlatos a következő módosított változatot használni:

$$w_j^+ = \begin{cases} \dfrac{1}{w_j} & \text{ha } w_j > \epsilon, \\ 0 & \text{ha } w_j \leq \epsilon, \end{cases}$$

ahol $\epsilon$ a számábrázolás pontossága körüli konstans, dupla pontosságú lebegőpontos ábrázolásnál kb. $10^{-12}$.

**6.4.2. Tétel.** *Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletnek van megoldása, akkor a legkisebb abszolút értékű megoldást $A^+\mathbf{b}$ szolgáltatja.*

**Bizonyítás.** Legyen $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ és $\mathbf{x}_1$ pedig a magtér tetszőleges eleme. Ekkor

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} + \mathbf{x}_1| &= |VW^+U^T\mathbf{b} + \mathbf{x}_1| \\ &= |V(W^+U^T\mathbf{b} + V^T\mathbf{x}_1)| \\ &= |W^+U^T\mathbf{b} + V^T\mathbf{x}_1| \end{aligned}$$

Itt kihasználtuk azt, hogy $V$ távolságtartó transzformáció. Vizsgáljuk meg az összeg két tagját. Az elsőnek csak azon koordinátái nem nullák, ahol $w_j \neq 0$, míg a másodiknak, mivel $\mathbf{x}_1$ a magtérből van, csak azon koordinátái nem 0-ák, ahol $w_j = 0$. Így a megoldásnak akkor lesz az abszolút értéke minimális, mikor $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. ■

Ha $\mathbf{b}$ nincs a képtérben, akkor nincs megoldás. De ekkor sokszor hasznos a következő feladatot vizsgálni: Milyen $\mathbf{x}$ vektorra lesz $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ minimális ? Erre megint csak az általánosított inverz ad megoldást:

**6.4.3. Tétel.** *A $\varphi(\mathbf{x}) = |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$ függvénynek $A^+\mathbf{b}$-ben minimuma van.*

**Bizonyítás.** Legyen $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ és legyen $\mathbf{x}_1$ tetszőleges vektor, amit hozzáadunk $\mathbf{x}$-hez. Használjuk az $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ jelölést. Nyilván $\mathbf{b}_1$ az $A$ képterében van. Most tekintsük a következő egyenlőséget:

$$\begin{aligned} |A\mathbf{x} - \mathbf{b} + \mathbf{b}_1| &= |(UWV^T)(VW^+U^T\mathbf{b}) - \mathbf{b} + \mathbf{b}_1| \\ &= |(UWW^+U^T - I)\mathbf{b} + \mathbf{b}_1| \\ &= |U[(WW^+ - I)U^T\mathbf{b} + U^T\mathbf{b}_1]| \\ &= |(WW^+ - I)U^T\mathbf{b} + U^T\mathbf{b}_1|. \end{aligned}$$

Most $(WW^+ - I)$ egy olyan diagonális mátrix, aminek csak ott van nem nulla tagja, ahol $w_j = 0$, míg $U^T\mathbf{b}_1$-nek csak $w_j \neq 0$ esetben van 0-tól különböző komponense, mivel $\mathbf{b}_1$ a képtérben van. Így a minimum $\mathbf{b}_1 = \mathbf{0}$ esetben vétetik fel. ■

# Bibliography


[Cho91] B. K. Choi. *Surface Modeling for CAD/CAM.* Elsevir, 1991.

[CK83] H. Chiyokura and F. Kimura. Design of solids with free-form surfaces. *Computer Graphics*, 17:287–298, 1983.

[Coo67] S. A. Coons. Surfaces for computer-aided design of space forms. Technical report, M.I.T., 1967. MAC-TR-41.

[dB78] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines.* Springer, 1978.

[dBD85] C. de Boor and R. DeVore. A geometric proof of total positivity for spline interpolation. *Mathematics of Computation*, 45:497–504, 1985.

[dBLS76] C. de Boor, T. Lyche, and L. L. Schumaker. On calculating with B-splines II. Integration. In L. Collatz, H. Werner, and G. Meinardus, editors, *Numerische Methoden der Approximationstheorie, Band 3*, pages 2123–146. Birkhauser, 1976.

[dBP77] C. de Boor and A. Pinkus. Backward error analysis for totally positive linear systems. *Numer. Math.*, 27:485–490, 1977.

[Deg90] W. L. F. Degen. Explicit continuity conditions for adjacent Bézier surface patches. *Computer Aided Geometric Design*, 7:181–189, 1990.

[DL91] R. A. DeVore and G. G. Lorentz. *Constructive Approximation.* Springer, 1991.

[DS88] W-H. Du and F. J. M. Schmitt. New results for the smooth connection between tensor product Bézier patches. In N. Magnenat-Thalmann and D. Thalmann, editors, *New Trends in Computer Graphics*, pages 351–363. Springer, 1988.

[DS91] W-H. Du and F. J. M. Schmitt. $G^1$ smooth connection between rectangular and triangular Bézier patches at a common corner. In Laurent et al. [LLeMS91], pages 161–168.

[Eps76] M. P. Epstein. On the influence of parametrization in parametric interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13:261–268, 1976.

[Far87] G. Farin, editor. *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends.* SIAM, 1987.

[Far92] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide.* Academic Press, 3 edition, 1992.

[Far94] G. Farin. *NURB Curves and Surfaces.* A. K. Peters, 1994.

[FN89] Th. A. Foley and G. M. Nielson. Knot selection for parametric spline interpolation. In Lyche and Schumaker [LS89], pages 261–272.

[FP79] I. D. Faux and M. J. Pratt. *Computational Geometry for Design and Manufacture.* Ellis Horwood, 1979.

[Gre74] J. A. Gregory. Smooth interpolation without twist constraints. In R. E. Barnhill and R. F. Riesenfeld, editors, *Computer Aided Geometric Design*, pages 71–87. Academic Press, 1974.

[Haj66] Gy. Hajós. *Bevezetés a Geometriába.* Tankönyvkiadó, 4 edition, 1966.

[Her87] G. Herron. Techniques for visual continuity. In Farin [Far87], pages 163–174.

[HL] T. Hermann and G. Lukács. A new insight into the $G^n$ continuity of polynomial surfaces. To appear in CAGD.

[HL93] J. Hoschek and D. Lasser. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design.* A. K. Peters, 1993.

[Hof89] C. M. Hoffmann. *Geometric and Solid Modeling.* Morgan Kaufmann Publishers, 1989.

[Hof90] C. M. Hoffmann. Algebraic and numerical techniques for offsets and blends. In W. Dahmen, M. Gasca, and C. A. Micchelli, editors, *Computation of Curves and Surfaces*, pages 499–528. Kluwer Academic Publishers, 1990.

[Hoh91] M. E. Hohmeyer. A surface intersection algorithm based on loop detection. In J. Rossignac and J. Turner, editors, *Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, pages 197–207. ACM SIGGRAPH, 1991.

[Hos92] M. Hosaka. *Modeling of Curves and Surfaces in CAD/CAM.* Springer, 1992.

[Kah83] J. Kahmann. Continuity of curvature between adjacent Bézier patches. In R. E. Barnhill and W. Boehm, editors, *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pages 65–75. North-Holland, 1983.

[Kar68] S. Karlin. *Total Positivity, I.* Stanford University Press, 1968.

[Knu82] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming, I.* Addison-Wesley, 1982.

[Lee87] E. T. Y. Lee. The rational Bézier representation for conics. In Farin [Far87], pages 3–19.

[Lee89] E. T. Y. Lee. Choosing nodes in parametric curve interpolation. *Computer-Aided Design*, 21:363–370, 1989.

[Lee92] E. T. Y. Lee. On a class of data parametrizations: variations on a theme of Epstein, II. In T. Lyche and L. L. Schumaker, editors, *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II.*, pages 381–390. Academic Press, 1992.

[LLeMS91] P-J. Laurent, A. Le Méhauté, and L. L. Schumaker, editors. *Curves and Surfaces.* Academic Press, 1991.

[LS89] T. Lyche and L. L. Schumaker, editors. *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design.* Academic Press, 1989.

[Luk94] G. Lukács. *A Generalized Scheme for Intersection and Interrogation Methods in CAGD.* Ph.D. dissertation, Computer and Automation Research Institute Hungarian Academy of Sciences, Budapest, January 1994.

[Män88] M. Mäntylä. *An Introduction to Solid Modeling.* Computer Science Press, 1988.

[Mor85] M. E. Mortenson. *Geometric Modeling.* Wiley, 1985.

[MS64] A. Mostowski and M. Stark. *Introduction to Higher Algebra.* Pergamon Press, 1964.

[NF89] G. M. Nielson and Th. A. Foley. A survey of applications of an affine invariant metric. In Lyche and Schumaker [LS89], pages 445–468.

[Nie87] G. M. Nielson. A transfinite, visually continuous, triangular interpolant. In Farin [Far87], pages 235–246.

[Pet91] J. Peters. Smooth interpolation of a mesh of curves. *Constructive Approximation*, 7:221–246, 1991.

[Ren91] G. Renner. Polynomial $n$-sided patches. In Laurent et al. [LLeMS91], pages 407–410.

[RT72] A. Rapcsák and L. Tamássy. *Differenciálgeometria I-II., Egyetemi jegyzet.* Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

[Sch81] L. L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory.* Wiley, 1981.

[SCK89] T. W. Sederberg, H. N. Christiansen, and S. Katz. Improved test for closed loops in surface intersections. *Computer-Aided Design*, 21:505–508, 1989.

[SDY89] B.-Q. Su and Liu D.-Y. *Computational Geometry — Curve and Surface Modeling.* Academic Press, 1989.

[SM88] T. W. Sederberg and R. J. Meyers. Loop detection in surface patch intersections. *Computer Aided Geometric Design*, 5:161–171, 1988.

[SNGN79] Gy. Szőkefalvi-Nagy, L. Gehér, and P. Nagy. *Differenciálgeometria.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[SS87] L. A. Shirman and C. H. Séquin. Local surface interpolation with Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*, 4:279–295, 1987.

[SS91] L. A. Shirman and C. H. Séquin. Local surface interpolation with Bézier patches: errata and improvements. *Computer Aided Geometric Design*, 8:217–221, 1991.

[Szo73] E. Szolcsányi. *Differenciálgeometria és Vektoranalízis, Egyetemi jegyzet.* Tankönyvkiadó, 1973.

[Yam88] F. Yamaguchi. *Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design.* Springer, 1988.